

# 随机点过程

戴永隆 编著



中山大学出版社

# 随机点过程

戴永隆 编著

中山大学出版社

# 随机点过程

戴永隆 编著

中山大学出版社出版

中山大学印刷厂印刷

广东省新华书店发行

开本:  $787 \times 1092 \times 1/16$  印张: 14.4 字数: 308,000

1984年9月第一版 1984年9月第一次印刷

印数 1—4,400

号书: 13399\*3 定价: 2.00元

15713

## 前 言

狄拉克的“公用事业理论的数学方法”被认为是随机点过程一般理论研究的开端。该书的许多基本概念,例如有序性、无后效性、平稳性、强度、Palm 函数等,一直为后人所引用并作为深入研究的对象。而以抽象空间为相空间的随机点过程的一般理论则是六十年代末和七十年代才建立起来的。K. Matthes, J. Kerstan 和 J. Macke 合著的“无穷可分点过程”,以及 O. Kallenberg 所著“随机测度”,系统地总结了这一时期的工作。近年来将点过程一般理论应用于排队论、分支过程、随机几何以及 Gibbs 点过程等分支的研究甚为活跃。

本书的目的是给概率论专业研究生提供一个基本教材,也可供大专院校理工科高年级学生参考。读者可以通过本书作为桥梁,以较短时间掌握随机点过程的基本内容和研究方法,从而达到能够阅读当前文献并从事相应的研究工作的目的。因此本书取材仅限于在理论上已经相当完备,然而又是进一步阅读这一分支学科近期文献和开展某些研究所必须了解的基本内容。

本书的写作和出版都是在梁之舜教授的热情支持和鼓励之下进行的。在八二年暑假高等学校概率论讨论班上,许多同志对本书原稿提出了许多宝贵意见,特别是严士健教授,厉则治、潘一民、刘秀芳副教授以及陈培德、丁万鼎、马志民、邵捷中等同志对本书原稿的一些错误和不当之处都提出了具体修改意见。裴祥同同志认真校对并誊写了全部书稿。作者在此向上述同志表示衷心感谢。

由于水平所限,错误和不当之处在所难免,敬请读者批评指正。

戴永隆

1984年1月

# 目 录

## 前 言

### 第一章 预备知识

§ 1. 局部单侧类定理	( 1 )
§ 2. 局部有限测度空间	( 2 )
§ 3. 弱收敛	( 4 )
§ 4. 局部弱收敛	( 7 )
§ 5. 强收敛	( 13 )
§ 6. Kakutani 定理	( 14 )
§ 7. Kolmogorov 定理	( 20 )

### 第二章 点过程基础

§ 1. 记号和定义	( 21 )
§ 3. 存在定理 (一): 一般情形	( 23 )
§ 3. 存在定理 (二): 一般情形	( 27 )
§ 4. 简单点分布	( 31 )
§ 5. 有序点分布	( 39 )
§ 6. 无后效分布	( 42 )
§ 7. Laplace 泛函	( 44 )
§ 8. 依分布收敛	( 48 )
§ 9. 卷积	( 60 )
§ 10. $\mathcal{N}_2$ 型分布	( 63 )
§ 11. 点过程的稀疏	( 67 )

### 第三章 无穷可分点过程

§ 1. 预备: 有限变差测度	( 72 )
§ 3. 无穷可分分布的刻画 (一)	( 76 )
§ 3. 依范数收敛	( 78 )
§ 4. 广义 $\mathcal{N}_2$ 型分布	( 83 )
§ 5. 无穷可分分布的刻画 (二)	( 91 )
§ 6. Poisson 过程	( 93 )
§ 7. Gauss—Poisson 过程	( 99 )
§ 8. 正则无穷可分分布	( 101 )
§ 9. 奇异无穷可分分布	( 109 )

### 第四章 点过程的收敛

§ 1. Campbell 测度	( 111 )
------------------	---------

§ 2. $Z^n$ 上依范数收敛定理及其推论	(113)
§ 3. 强无穷小三角序列	(117)
§ 4. 距离空间 $(\mathcal{S}_m, \rho_{\mathcal{S}_m})$	(119)
§ 5. $(\mathcal{S}_m, \rho_{\mathcal{S}_m})$ 中的收敛	(123)
§ 6. (弱)无穷小三角序列的收敛	(131)
§ 7. 收敛于 Poisson 过程	(134)
§ 8. 收敛于 Gauss—Poisson 过程	(138)
§ 9. 收敛于正则无穷可分分布	(140)

## 第五章 混合型 Poisson 分布

§ 1. 广义卷积	(143)
§ 2. 无穷可分点过程的 Campbell 测度	(146)
§ 3. $G_1$ 型分布	(151)
§ 4. 混合型 Poisson 过程	(154)
§ 5. $G_1$ 型分布的刻划	(155)
§ 6. Cox 过程	(162)
§ 7. 无穷可分混合型 Poisson 过程	(165)
§ 8. 混合型 Poisson 分布的 Campbell 测度	(166)

## 第六章 平稳点过程

§ 1. 平稳随机测度	(170)
§ 2. 遍历定理	(175)
§ 3. 平稳点过程	(177)
§ 4. 平稳 Poisson 过程	(179)
§ 5. Palm 测度	(181)
§ 6. 反演公式	(186)
§ 7. Korolyuk 定理	(188)
§ 8. Palm 分布	(191)
§ 9. 样本强度	(195)
§ 10. 一维情形, Palm—Khinchin 理论	(198)
§ 11. 平稳无穷可分点过程	(202)
§ 12. 平稳无穷可分点过程的遍历定理	(205)
§ 13. 平稳无穷可分点过程的样本强度	(209)
§ 14. 平稳无穷可分分布的 Palm 测度	(212)
§ 15. 平稳混合型 Poisson 过程	(213)
§ 16. 平稳正则无穷可分分布	(216)

参考文献	(218)
基本符号索引	(219)

## 第一章 预备知识

这一章是有关学习点过程必不可少的预备知识。从内容看，完全是测度论的一些补充。但在一般测度论著作中是不容易找到这些材料的。

### §1. 局部单调类定理

1. 本书恒设  $(X, \rho_X)$  是可分完备距离空间。以  $\mathcal{A}$  记  $X$  的全部开集所产生的  $\sigma$ -代数 (Borel 集类)；以  $\mathcal{B}$  记  $\mathcal{A}$  中全部有界集组成的类；即  $A \in \mathcal{B}$  则意味着  $A \in \mathcal{A}$ ，且满足

$$\sigma(A) = \sup_{a, b \in I} \rho_X(a, b) < \infty.$$

显然， $\mathcal{B}$  是一个环。当  $(X, \rho_X)$  是有界距离空间时， $\mathcal{B} = \mathcal{A}$ ；但当  $(X, \rho_X)$  不是有界距离空间时， $\mathcal{B}$  不是  $\sigma$ -环。虽然  $\mathcal{B}$  不是  $\sigma$ -环，但对任意  $A \in \mathcal{B}$ ， $A \cap \mathcal{B}$  却是  $A$  的子集  $\sigma$ -代数。 $\mathcal{B}$  的这个性质对我们以后的讨论很有用处。

2. 定义  $\mathcal{B}$  的子环  $\Gamma$  称为局部  $\sigma$ -环，如果它满足下列两个条件：

1) 对  $\Gamma$  中的任意序列  $(A_n)$ ， $\bigcap A_n \in \Gamma$ ；

2) 对  $\Gamma$  中的序列  $(A_n)$ ，若  $\bigcup A_n \in \mathcal{B}$ ，则也有  $\bigcup A_n \in \Gamma$ 。

显然， $\mathcal{B}$  本身是局部  $\sigma$ -环。需要注意的是，如果  $\Gamma$  是局部  $\sigma$ -环，它不一定是  $\sigma$ -环，除非  $(X, \rho_X)$  是有界距离空间。然而，对任意  $A \in \Gamma$ ， $A \cap \Gamma$  是  $A$  的子集  $\sigma$ -代数。

3. 定义 称  $\mathcal{B}$  的子集类  $\Gamma$  是局部单调类，如果它满足下列两条件：

1) 若  $A_n \in \Gamma$ ， $A_n \downarrow$ ，则  $\bigcap A_n \in \Gamma$ ；

2) 若  $A_n \in \Gamma$ ， $A_n \uparrow$  并且  $\bigcup A_n \in \mathcal{B}$ ，则  $\bigcup A_n \in \Gamma$ 。

局部单调类不一定是单调类，除非  $(X, \rho_X)$  是有界距离空间。

4. 在定义 2 中，条件 1) 其实可由 2) 推出。事实上，设  $(A_n) \subset \Gamma$ ，由于 2) 以及  $\Gamma$  是环的假定可知  $\bigcup \{A_i \setminus (A_1 \cap A_n)\} \in \Gamma$ ，从而

$$\bigcap A_n = A_1 \setminus \bigcup \{A_i \setminus (A_1 \cap A_n)\} \in \Gamma.$$

任给  $\Gamma \subset \mathcal{B}$ ，包含集类  $\Gamma$  的最小局部单调类记作  $L_m(\Gamma)$ ；包含集类  $\Gamma$  的最小局部  $\sigma$ -环记作  $L_\sigma(\Gamma)$ 。

下面的定理是单调类定理的推广。

5. 局部单调类定理 设  $\Gamma_1, \Gamma_2$  是  $\mathcal{B}$  的两个子集类，并且  $\Gamma_1 \subset \Gamma_2$ 。如果  $\Gamma_1$  是环而  $\Gamma_2$  是局部单调类，则  $L_\sigma(\Gamma_1) \subset \Gamma_2$ 。

**证明** 我们只须证明  $L_m(\Gamma_1)$  是环。因为如果  $L_m(\Gamma_1)$  是环, 则也必是局部  $\sigma$ -环, 从而推出  $L_\sigma(\Gamma_1) \subset L_m(\Gamma_1) \subset \Gamma_1$ , 对任意固定的  $A \in L_m(\Gamma_1)$ , 以  $L'(A)$  记  $L_m(\Gamma_1)$  中所有具有如下性质的集合  $B$ : 它使得集合  $B \setminus A, A \setminus B, A \cup B$  都属于  $L_m(\Gamma_1)$ 。容易看出,  $L'(A)$  是局部单调类, 并且  $BeL'(A)$  和  $AeL'(B)$  是等价的。由于  $\Gamma_1$  是环, 所以当  $A \in \Gamma_1, B \in \Gamma_1$  时有  $BeL'(A)$ , 从而  $\Gamma_1 \subset L'(A)$ , 但  $L_m(\Gamma_1)$  是包含  $\Gamma_1$  的最小局部单调类, 所以  $L_m(\Gamma_1) \subset L'(A)$ 。这说明当  $A \in \Gamma_1$  固定时对一切  $B \in L_m(\Gamma_1)$  都有  $BeL'(A)$ , 故也有  $AeL'(B)$ 。于是又得: 对任意固定的  $B \in L_m(\Gamma_1)$  也有  $L_m(\Gamma_1) \subset L'(B)$ 。这就说明, 对于  $L_m(\Gamma_1)$  中的任意两个元素  $A, B$  都有  $BeL'(A)$ 。由  $L'(A)$  的定义知道  $L'_m(\Gamma_1)$  是环。定理得证。

由这个定理立即推出: 如果  $\Gamma$  是  $\mathcal{A}$  的子环并且  $\mathcal{A}$  是由  $\Gamma$  产生的, 则  $L_m(\Gamma) = L_\sigma(\Gamma) = \mathcal{A}$ 。

## §2 局部有限测度空间

6. 设  $\mu$  是  $(X, \mathcal{A})$  上的一个测度, 如果对任意的  $A \in \mathcal{A}, \mu(A) < \infty$ , 则称  $\mu$  是  $(X, \mathcal{A})$  上的局部有限测度。于是对任意的  $A \in \mathcal{A}, \mu$  是  $(A, \mathcal{A} \cap \mathcal{A})$  上的全有限测度。

记  $(X, \mathcal{A})$  上的全体局部有限测度为  $M$ 。

如果  $\mu \in M$  并且对任意的  $A \in \mathcal{A}, \mu(A)$  取非负整数, 则称  $\mu$  是  $(X, \mathcal{A})$  上的计数测度。

记  $(X, \mathcal{A})$  上的全体计数测度为  $N$ 。

对任意的  $a \in X, A \in \mathcal{A}$ , 令

$$\delta_a(A) = 1_A(a),$$

其中  $1_A(\cdot)$  是  $A$  的示性函数。于是  $\delta_a(\cdot) \in N$ , 映射  $a \mapsto \delta_a$  是  $X$  到  $N$  内的——映射。

7. 定理 对任意的  $\mu \in N$ , 集合  $\{a \in X, \mu(a) > 0\}$  是有限或可列集, 并且

$$\mu = \sum_{a \in X, \mu(a) > 0} \mu(a) \delta_a,$$

其中的  $\mu(a)$  是将  $a$  看作集合, 即  $\mu(a) = \mu(\{a\})$ 。

**证明** 取  $A_n \in \mathcal{A}, A_n \uparrow X$ 。由于  $\mu$  是计数测度, 所以  $A_n \cap \{a \in X, \mu(a) > 0\}$  的个数最多等于  $\mu(A_n)$ , 故至多是有有限集, 因此  $X \cap \{a \in X, \mu(a) > 0\}$  至多是可数集。现记

$$\mu'(B) = [\mu - \sum_{a \in X, \mu(a) > 0} \mu(a) \delta_a](B), \quad B \in \mathcal{A}.$$

显然  $\mu' \in N$ , 并且对任意的  $a \in X, \mu'(a) = 0$ 。现证  $\mu' = 0$  (即  $\mu'$  是  $(X, \mathcal{A})$  上的零测度)。假定  $\mu' \neq 0$ 。由于  $X$  可用半径为 1 的可数开球列  $\{S_i(b_i)\}$  覆盖, 故存在  $a_1 \in X$ , 使  $\mu'(S_1(a_1)) > 0$ , 再以半径是  $\frac{1}{2}$  的开球列覆盖  $S_1(a_1)$ , 则存在  $a_2 \in X$  使  $\mu'(S_1(a_1) \cap S_{\frac{1}{2}}(a_2)) > 0$ 。如此继续下

去, 得到  $a_1, a_2, \dots$ , 使

$$\mu'(S_1(a_1) \cap \dots \cap S_{n-1}(a_{n-1})) > 0.$$

然而易知  $(a_n)$  是  $(X, \rho_X)$  中的 Cauchy 序列, 因为

$$\begin{aligned} \rho_X(a_n, a_{n+m}) &\leq \rho_X(a_n, a_{n+1}) + \rho_X(a_{n+1}, a_{n+2}) + \dots + \rho_X(a_{n+m-1}, a_{n+m}) \\ &\leq \frac{2}{2^{n-1}} + \frac{2}{2^n} + \dots + \frac{2}{2^{n+m-1}} < \frac{1}{2^{n-1}}. \end{aligned}$$



令  $m \rightarrow \infty$  得  $\rho_X(a_n, a) \leq 2^{-n+1}, n=1, 2, \dots$ . 设  $x \in S_{2^{-n}}(a_{n+1})$  则  
 $\rho_X(x, a) \leq \rho_X(x, a_{n+1}) + \rho_X(a_{n+1}, a) \leq 2^{-n} + 2^{-n+1} < 2^{-n+1}$ ,  
 故  $x \in S_{2^{-n+1}}(a)$  从而  $S_{2^{-n}}(a_{n+1}) \subset S_{2^{-n+1}}(a)$ . 由此可证

$$\mu'(S_{\frac{1}{n}}(a)) \geq 1, \text{ 故 } \mu'(a) = \inf_n \mu'(S_{\frac{1}{n}}(a)) \geq 1,$$

这与上面的  $\mu'(a) = 0$  (对任意的  $a \in X$ ) 矛盾. 证毕

8. 定义 在  $M$  上引进  $\sigma$ -代数  $\mathcal{M}$ , 它是使得全体如下形式的由  $M$  到  $[0, \infty)$  的映射

$$\mu \sim \mu(A), \quad A \in \mathcal{A},$$

都为可测的最小  $\sigma$ -代数.

$(M, \mathcal{M})$  称为局有限测度空间.

9. 引理  $N \in \mathcal{M}$ .

证明 以  $\mathcal{M}$  记  $(X, \rho_X)$  中由有界开集作成的可数基, 以  $\Gamma$  表示  $\mathcal{M}$  所产生的环, 显然  $\Gamma \subset \mathcal{A}$  并且  $\Gamma$  至多是可数的集类. 令  $Z_+ = \{0, 1, 2, \dots\}$ , 于是

$$\bigcap_{A \in \Gamma} \{\mu: \mu \in M, \mu(A) \in Z_+\} \in \mathcal{M},$$

以  $\Gamma_1$  记满足下面条件的  $\mathcal{A}$  的子类:  $\Gamma_1 \subset \mathcal{A}$ , 并且  $B \in \Gamma_1$  当且仅当

$$\{\mu: \mu \in M, \mu(B) \in Z_+\} \supset \bigcap_{A \in \Gamma} \{\mu: \mu \in M, \mu(A) \in Z_+\}$$

显然  $\Gamma_1 \supset \Gamma$ , 并且  $\Gamma_1$  是局部单调类. 由于  $L_\sigma(\Gamma) = \mathcal{A}$  所以由局部单调类定理知  $\mathcal{A} = \Gamma_1$ . 从而

$$N = \bigcap_{A \in \mathcal{A}} \{\mu: \mu \in M, \mu(A) \in Z_+\} = \bigcap_{A \in \Gamma} \{\mu: \mu \in M, \mu(A) \in Z_+\} \in \mathcal{M}. \quad \text{证毕.}$$

由于这个结果, 我们令

$$N = N \cap \mathcal{M}$$

于是  $(N, N)$  是可测空间, 称为计数测度空间.

不难验证,  $N$  是使得所有如下的映射为可测的最小  $\sigma$ -代数,

$$\mu \sim \mu(A), \quad A \in \mathcal{A}.$$

下面的引理虽然简单, 今后将常用到.

10. 引理 映射  $\alpha \sim \delta_\alpha$  是从  $(X, \mathcal{A})$  到  $(N, N)$  内的双方可测映射.

证明 记映射  $\alpha \sim \delta_\alpha$  为  $f$ , 由前段关于  $N$  的说明可知, 对于任意的  $A \in \mathcal{A}$  及任意的  $h \in Z_+$ , 集合  $\{\mu: \mu \in N, \mu(A) = h\}$  关于  $f$  的逆映像  $N = 0, h=1$  或  $h \geq 2$  而分别是  $\mathcal{A}$  中的无  $A^c$ ,  $A$  或  $\phi$ . 于是知道  $f^{-1}(N) \subset \mathcal{A}$ .

另一方面, 对任意的  $A \in \mathcal{A}$ , 取一串  $A_n \in \mathcal{A}, A_n \uparrow X$ , 仍由  $N$  的构造可知

$$\{\mu: \mu \in N, \mu(A) \geq h\} = \bigcup_n \{\mu: \mu \in N, \mu(A \cap A_n) \geq h\} \in N, \quad h=1, 2.$$

于是  $\{\mu: \mu \in N, \mu(A) = 1\} = \{\mu: \mu \in N, \mu(A) \geq 1\} \setminus \{\mu: \mu \in N, \mu(A) \geq 2\}$  属于  $N$ . 这说明对任意的  $A \in \mathcal{A}$  有

$$f(A) = \{\mu: \mu \in N, \mu(A) = 1, \mu(X) = 1\} \in N. \quad \text{引理证毕.}$$

11. 对任意的  $\mu \in M, A \in \mathcal{A}$ , 记

$$A\mu(\cdot) = \mu(\cdot \cap A)$$

并称之为 $\mu$ 在 $A$ 上的限制。

显然, 固定 $A \in \mathcal{A}$ , 映射 $\mu \mapsto A\mu$ 是 $(M, M)$ 到自身的可测映射。这个映射在 $N$ 上的限制就是 $(N, N)$ 到自身的可测映射。

对固定的 $A \in \mathcal{A}$ , 我们以 $\mathcal{N}_A$ 记如下集合族

$$\{\mu: \mu \in N, \mu(B) = h\}, B \in A \cap \mathcal{B}, h \in \mathbb{Z}_+,$$

所产生的 $\sigma$ -代数。

### §3. 弱收敛

12. 在研究点过程的收敛性时, 弱收敛、局部弱收敛和淡收敛(vague收敛)都是很有用的工具。本书假定读者已经有弱收敛的基本知识(关于弱收敛的一般理论可见 P. Billingsley(1968)第一章)。我们只着重讨论本书后面将广泛用到的局部弱收敛。为了对这三种收敛性有比较清楚的认识, 有必要将它们作一番统一的叙述, 以便比较。在给出它们的定义前, 先引进一些记号。

如前所述,  $\mathcal{A}$ 表示 $(X, \rho_X)$ 的全体Borel集;  $\mathcal{B}$ 表示 $\mathcal{A}$ 中全体有界集; 又以 $\mathcal{B}_K$ 记 $\mathcal{A}$ 中全体相对紧集, 即 $A \in \mathcal{B}_K$ 表示 $A \in \mathcal{A}$ , 并且 $A$ 的闭包 $\bar{A}$ 是紧集。

显然有

$$\mathcal{B}_K \supset \mathcal{B} \supset \mathcal{B}_\infty$$

以 $\mathcal{F}_b$ 记 $(X, \rho_X)$ 上定义的全体有界连续函数; 以 $\mathcal{F}$ 记 $(X, \rho_X)$ 上定义的全体有界支撑的有界连续函数, 即 $f \in \mathcal{F}$ 当且仅当 $f \in \mathcal{F}_b$ 且 $\{f \neq 0\}$ 的闭包是有界集; 又以 $\mathcal{F}_K$ 记 $(X, \rho_X)$ 上定义的全体具有紧支撑的有界连续函数, 即 $f \in \mathcal{F}_K$ 当且仅当 $f \in \mathcal{F}_b$ 且集 $\{f \neq 0\}$ 的闭包是紧集。

显然有

$$\mathcal{F}_K \supset \mathcal{F} \supset \mathcal{F}_b$$

我们以 $M_b$ 记 $(X, \mathcal{A})$ 上的全体全有限测度; 如前所述, 以 $M$ 记 $(X, \mathcal{A})$ 上的全体局有限测度; 此外, 以 $M_K$ 记 $(X, \mathcal{A})$ 上的全体紧有限测度。这里称 $(X, \mathcal{A})$ 上的测度 $\mu$ 为紧有限的, 如果对任意的 $A \in \mathcal{B}_K$ , 有 $\mu(A) < \infty$ 。

显然有

$$M_b \subset M \subset M_K$$

13. 定义 设 $(\mu_n) \subset M_b$ , 称 $(\mu_n)$ 弱收敛于 $\mu \in M_b$ , 如果对于所有的 $f \in \mathcal{F}_b$ 有

$$\lim_n \int f d\mu_n = \int f d\mu.$$

设 $(\mu_n) \subset M$ , 称 $(\mu_n)$ 局部弱收敛于 $\mu \in M$ , 如果对所有的 $f \in \mathcal{F}$ 有

$$\lim_n \int f d\mu_n = \int f d\mu.$$

设 $(\mu_n) \subset M_K$ , 称 $(\mu_n)$ 淡收敛于 $\mu \in M_K$ , 如果对所有的 $f \in \mathcal{F}_K$ 有

$$\lim_n \int f d\mu_n = \int f d\mu.$$

$(\mu_n)$ 弱收敛于 $\mu$ 记作  $\mu_n \xrightarrow{w} \mu$ ;

$(\mu_n)$ 局部弱收敛于 $\mu$ 记作  $\mu_n \xrightarrow{l} \mu$ ;

$(\mu_n)$ 淡收敛于 $\mu$ 记作  $\mu_n \xrightarrow{v} \mu$ .

必须注意, 弱收敛和淡收敛的概念仅只依赖于空间 $(X, \rho_x)$ 的拓扑结构, 而不依赖于距离的选取; 而局部弱收敛则恰恰是依赖于距离的选取.

14. 定理 设 $(X, \rho_x)$ 是可分完备距离空间.

1) 对任意的 $\mu \in M_b, (\mu_n) \subset M_b, \mu_n \xrightarrow{w} \mu$ 与 $\mu_n \xrightarrow{l} \mu$ 等价, 当且仅当 $(X, \rho_x)$ 是有界距离空间;

2) 对任意的 $\mu \in M, (\mu_n) \subset M, \mu_n \xrightarrow{l} \mu$ 与 $\mu_n \xrightarrow{v} \mu$ 等价, 当且仅当 $(X, \rho_x)$ 中的任意有界集都是相对紧的;

3) 对任意的 $\mu \in M_b, (\mu_n) \subset M_b, \mu_n \xrightarrow{w} \mu, \mu_n \xrightarrow{l} \mu$ 与 $\mu_n \xrightarrow{v} \mu$ 三者一致, 当且仅当 $(X, \rho_x)$ 是紧空间.

证明 只证1), 2), 3)可类似地证明. 当 $(X, \rho_x)$ 是有界距离空间时, 两种收敛性的等价性是明显的. 今设 $M_b$ 中任意的局部弱收敛序列必也是弱收敛序列, 要证 $(X, \rho_x)$ 是有界距离空间. 假定 $(X, \rho_x)$ 不是有界距离空间, 则存在点列 $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ , 使 $\rho_x(x_n, x_0) \rightarrow \infty$ . 令

$$\mu_n(\cdot) = \delta_{x_n}(\cdot), \quad n = 1, 2, \dots,$$

则 $(\mu_n) \subset M_b$ . 又令 $\mu = 0$  (零测度), 则对任意的 $f \in \mathcal{F}$ , 有 $\lim_n \int f d\mu_n = \int f d\mu = 0$ , 从而

$\mu_n \xrightarrow{l} \mu$ . 然而 $\mu_n \xrightarrow{w} \mu$ 不成立, 因为当 $f \equiv 1$ 时,  $\int f d\mu_n = 1$  而  $\int f d\mu = 0$ . 这与假设矛盾.

15. 例 考虑实数序列 $(x_1, \dots, x_n, \dots)$ ,  $\sum_{n=1}^{\infty} x_n^2 < \infty$  作成的距离空间 $l_2$ , 其中距离定义

为:

$$\rho(x, y) = \sqrt{\sum_n (x_n - y_n)^2}$$

这里 $x = (x_1, x_2, \dots, x_n, \dots), y = (y_1, y_2, \dots, y_n, \dots)$ .  $(l_2, \rho)$ 是可分完备距离空间. 在这个空间中

$$\mathcal{A} \supset \mathcal{B} \supset \mathcal{F}_k$$

记

$$e_n = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots)$$

↑  
第n位

令 $\mu_n = \delta_{e_n}, \mu = 0$ , 则 $\mu_n \xrightarrow{v} \mu$ 但 $\mu_n \not\xrightarrow{l} \mu, \mu_n \not\xrightarrow{w} \mu$ 都不成立.

若记

$$e'_n = (0, \dots, 0, n, 0, \dots)$$

↑  
第n位

并令  $\mu_n = \delta_{e'_n}$ ,  $\mu = 0$ , 则  $\mu_n \xrightarrow{v} \mu$  并且  $\mu_n \xrightarrow{t} \mu$  但  $\mu_n \xrightarrow{w} \mu$  不成立。

这个简单的例子指出, 在  $(I_2, \rho)$  中, 三种收敛性都不相同。

下面不加证明地引述弱收敛的几个著名结果。首先给出一个定义。设  $\mu \in M$ ,  $A \in \mathcal{A}$ , 如果有  $\mu(\partial A) = 0$  (此处  $\partial A$  表示  $A$  的边界), 则称  $A$  是  $\mu$  连续集。全体  $\mu$  连续集记作  $\mathcal{A}_\mu$ 。

**10. 定理** 设  $(\mu_n) \subset M_b$ , 则下述命题等价

- 1)  $\mu_n \xrightarrow{w} \mu$ ;
- 2)  $\lim_n \mu_n(A) = \mu(A)$ ; 凡  $A \in \mathcal{A}_\mu$ ;
- 3)  $\lim_n \sup \mu_n(F) \leq \mu(F)$ , 凡闭集  $F$ , 并且  
 $\lim_n \mu_n(X) = \mu(X)$ ;
- 4)  $\lim_n \inf \mu_n(G) \geq \mu(G)$ , 凡开集  $G$ , 并且  
 $\lim_n \mu_n(X) = \mu(X)$ 。

这个定理是关于弱收敛的基本定理, 其证明见 Billingsley (1968) 第一章定理 2.1。

下面的两个定理是著名的 Prokhorov 定理。

**17. 定理** 在  $M_b$  上存在一个距离  $\rho_{M_b}$ , 使得  $(M_b, \rho_{M_b})$  是可分完备距离空间,  $M_b$  中由距离  $\rho_{M_b}$  所产生的拓扑, 正好是  $M_b$  中由弱收敛所产生的拓扑。(参阅 Prokhorov (1956))。

**18. 定理** 距离空间  $(M_b, \rho_{M_b})$  中的子集  $Y$  是相对紧的, 当且仅当

$$\sup_{\mu \in Y} \mu(X) < \infty$$

并且对任意的  $\epsilon > 0$ , 存在紧集  $K_\epsilon$  使

$$\sup_{\mu \in Y} \mu(K_\epsilon^c) < \epsilon.$$

(参阅 Billingsley (1968) 第一章定理 6.1, 6.2)。

上述定理中的相对紧性, 可以有另外一种提法, 设  $Y$  是  $M_b$  的子集, 称  $Y$  在弱收敛意义下相对紧, 或称为弱相对紧, 如果对  $Y$  中的任意序列  $(\mu_n) \subset Y$ , 可以抽出子序列  $(\mu_{n_k})$ , 使

$$\mu_{n_k} \xrightarrow{w} \text{某个 } \mu \in M_b.$$

这里所谓的弱相对紧集与定理 18 中的  $\rho_{M_b}$  意义下的相对紧集是一回事 (参阅定理 17)。

下一节的目的是将定理16—18改写为局部弱收敛的形式，这对我们今后研究点过程与随机测度的收敛性是很有用处的。

## §4. 局部弱收敛

**19. 引理** 设  $G \subset X$  是任意的有界开集，则存在有界开集列  $(G_n)$ ,  $G_n \uparrow G$  和一串  $(f_n)$ ,  $f_n \in \mathcal{F}$ , 使

$$1_G \geq f_n \geq 1_{G_n} \uparrow 1_G.$$

**证明** 令

$$G_n = \left\{ a: \rho_X(a, G^c) > \frac{1}{n} \right\},$$

其中  $G^c$  是  $G$  的余集。于是  $G_n$  是开集,  $G_n \uparrow G$ . 令

$$f_n(a) = 1 - n(\rho_X(a, G_n) \wedge n^{-1}),$$

其中  $G_n$  是  $G_n$  的闭包,  $a \wedge b = \min(a, b)$ . 于是  $f_n$  在  $G^c$  上为 0, 故  $f_n \in \mathcal{F}$ , 并且显然有  $1_G \geq f_n \geq 1_{G_n} \uparrow 1_G$ . 得证。

**20. 引理** 设  $z \in X$ ,  $S_j(z)$  是以  $z$  为中心, 半径为  $j$  的开球,  $j = 1, 2, \dots$ . 又设  $f_j$  是  $(X, \rho_X)$  上的有界连续函数, 满足 (根据 Urysohn 引理)

$$1_{S_j(z)}(\cdot) \leq f_j(\cdot) \leq 1_{S_{j+1}(z)}(\cdot).$$

于是  $f_j \in \mathcal{F}$ . 现设  $(\mu_n) \subset M$ , 记

$$\mu_n^{(j)}(A) = \int_A f_j d\mu_n, \quad A \in \mathcal{F}_0.$$

则  $\mu_n \xrightarrow{f} \mu$  某个  $\mu \in M$ , 当且仅当对一切  $j = 1, 2, \dots$  有  $\mu_n^{(j)} \xrightarrow{w} \mu^{(j)}$  某个  $\mu^{(j)} \in M_b$ . 这时必有

$$\mu^{(j)}(A) = \int_A f_j d\mu, \quad A \in \mathcal{F}_0.$$

**证明** 必要性 设  $\mu_n \xrightarrow{f} \mu$ , 则对任意的有界连续函数  $f \in \mathcal{F}_b$  有  $ff_j \in \mathcal{F}$ , 所以

$$\int f d\mu_n^{(j)} = \int ff_j d\mu_n \xrightarrow{f} \int ff_j d\mu = \int f d\mu^{(j)},$$

即有  $\mu_n^{(j)} \xrightarrow{w} \mu^{(j)}$ ,  $j = 1, 2, \dots$ .

充分性 假定对一切  $j = 1, 2, \dots$  都有

$$\mu_n^{(j)} \xrightarrow{w} \mu^{(j)}.$$

设  $f \in \mathcal{F}$ , 若  $f$  的支集在  $S_j$  之内, 则对任意的  $m \geq j$  有

$$\begin{aligned} \mu^{(m)} f &= \int_{S_j} f d\mu^{(m)} = \lim_n \int_{S_j} f d\mu_n^{(m)} \\ &= \lim_n \int_{S_j} ff_m d\mu_n = \lim_n \int_{S_j} ff_j d\mu_n = \lim_n \int_{S_j} f d\mu_n^{(j)} = \mu^{(j)} f. \end{aligned}$$

这里引进了记号  $\mu f = \int f d\mu$ .

现设  $G$  是任意有界开集, 于是存在  $j$  使  $G \subset S_j$ . 由引理 19, 存在  $G_n \uparrow G$  以及  $g_n \in \mathcal{F}$  使

$$1_G \geq g_n \geq 1_{G_n} \uparrow 1_G,$$

于是当  $m \geq j$  时, 由前面的推导得

$$\mu^{(m)}(G) \geq \mu^{(m)} g_n = \mu^{(j)} g_n \geq \mu^{(j)}(G_n) \uparrow \mu^{(j)}(G),$$

以及

$$\mu^{(j)}(G) \geq \mu^{(j)} g_n = \mu^{(m)} g_n \geq \mu^{(m)}(G_n) \uparrow \mu^{(m)}(G),$$

所以

$$\mu^{(m)}(G) = \mu^{(j)}(G), \quad m \geq j.$$

由此不难推出, 对一切  $A \in \mathcal{B}$ ,  $A \subset S_j$ , 都有

$$\mu^{(j)}(A) = \mu^{(j+1)}(A) = \dots.$$

现对于任意的  $B \in \mathcal{B}$  令

$$\mu(B) = \sup_j \mu^{(j)}(B \cap S_j).$$

这样定义的  $\mu \in M$ , 上面实际上已经证明了

$$\mu_n \xrightarrow{I} \mu.$$

上节中我们已用  $\mathcal{A}_\mu$  表示  $\mu$  的连续集. 现令

$$\mathcal{B}_\mu = \mathcal{B} \cap \mathcal{A}_\mu,$$

并称  $\mathcal{B}_\mu$  中的集为有界  $\mu$  连续集. 于是  $A \in \mathcal{B}_\mu$  是有界  $\mu$  连续集的充要条件是,  $A \in \mathcal{B}$  并且  $\mu(\partial A) = 0$ .

**21. 引理**  $\mathcal{A}_\mu$  是  $\mathcal{A}$  的子环,  $\mathcal{B}_\mu$  是  $\mathcal{B}$  的子环.

**证明** 设  $A, B \in \mathcal{B}_\mu$ , 则由

$$\begin{aligned} \partial(A \cup B) &= (\overline{A \cup B}) \cap (\overline{A \cup B})^c = (\overline{A \cup B}) \cap (\overline{A^c \cap B^c})^c \subset (\overline{A \cup B}) \cap \overline{A^c B^c} \\ &\subset (\overline{A} \cap \overline{A^c}) \cup (\overline{B} \cap \overline{B^c}) = \partial A \cup \partial B, \end{aligned}$$

推出  $\mu(\partial(A \cup B)) \leq \mu(\partial A) + \mu(\partial B) = 0$ , 即  $A \cup B \in \mathcal{B}_\mu$ . 又因为

$$\begin{aligned} \partial(A \setminus B) &= \partial(A \cap B^c) = \partial((A \cap B^c)^c) = \partial(A^c \cup B) \subset \partial(A^c) \cup \partial(B) \\ &= \partial(A) \cup \partial(B). \end{aligned}$$

推出  $\mu(\partial(A \setminus B)) = 0$ , 即  $A \setminus B \in \mathcal{B}_\mu$ . 于是  $\mathcal{B}_\mu$  是  $\mathcal{B}$  的子环. 同理可证  $\mathcal{A}_\mu$  是  $\mathcal{A}$  的子环. 实际上  $\mathcal{A}_\mu$  还是代数.

相应于定理 16, 我们证明下面的等价命题.

**22. 定理** 设  $(\mu_n) \subset M$ , 则下述命题等价

- 1)  $\mu_n \xrightarrow{I} \mu_0$
- 2)  $\mu_n(A) \rightarrow \mu(A)$ ,  $(n \rightarrow \infty)$  凡  $A \in \mathcal{B}_{\mu_0}$
- 3)  $\limsup_n \mu_n(F) \leq \mu(F)$ , 凡有界闭集  $F$ , 以及

$$\liminf_n \mu_n(G) \geq \mu(G), \text{ 凡有界开集 } G.$$

**证明** 1)  $\Rightarrow$  3). 设  $F$  是有界闭集, 选取有界开集列  $(G_m)$ ,  $G_m \uparrow F$ , 对每个  $m$ , 选取  $f_m \in \mathcal{F}$  使

$$1_f \leq f_m \leq 1_{G_m}.$$

由于  $\mu_n \xrightarrow{I} \mu$ , 当  $m$  固定时有

$$\limsup_n \mu_n(F) \leq \lim_n \int f_m d\mu_n = \int f_m d\mu \leq \mu(G_m),$$

所以

$$\limsup_n \mu_n(F) \leq \lim_m \mu(G_m) = \mu(F).$$

设  $G$  是有界开集, 取闭集列  $F_m \uparrow G$  (例如  $F_m$  可取为  $\{a: \rho_x(a, G) \geq \frac{1}{m}\}$ ) 同样可

证得

$$\liminf_n \mu_n(G) \geq \mu(G).$$

3)  $\Rightarrow$  2). 设  $A \in \mathcal{F}_\mu$ , 以  $\bar{A}$ ,  $A^\circ$  分别记  $A$  的闭包和内部, 则由 3) 推知

$$\begin{aligned} \mu(A) &= \mu(\bar{A}) \geq \limsup_n \mu_n(\bar{A}) \geq \limsup_n \mu_n(A) \geq \liminf_n \mu_n(A) \\ &\geq \liminf_n \mu_n(A^\circ) \geq \mu(A^\circ) = \mu(A), \end{aligned}$$

所以

$$\lim \mu_n(A) = \mu(A).$$

2)  $\Rightarrow$  1). 设  $f \in \mathcal{F}$ , 记  $f$  的支撑为  $F$ , 则  $F$  是有界闭集. 设  $\varepsilon > 0$ , 令

$$F_\varepsilon = \{a: \rho_x(a, F) \leq \varepsilon\},$$

这是有界集. 由于  $\partial F_\varepsilon \subset \{a: \rho_x(a, F) = \varepsilon\}$ , 所以当  $\varepsilon' \neq \varepsilon''$  时,  $\partial F_{\varepsilon'}$  与  $\partial F_{\varepsilon''}$  不相交. 这说明对固定的  $\varepsilon > 0$ , 开区间  $(0, \varepsilon)$  中至多只有可数个  $\varepsilon'$  使  $\mu(\partial F_{\varepsilon'}) > 0$ . 于是存在  $\varepsilon_0 > 0$  使  $\mu(\partial F_{\varepsilon_0}) = 0$ , 即  $F_{\varepsilon_0}$  是有界  $\mu$ -连续集. 固定这样一个  $\varepsilon_0$ , 并记  $B = F_{\varepsilon_0}$ .

现设  $A$  是任意  $\mu$ -连续集, 即  $A \in \mathcal{F}_\mu$ , 于是  $A \cap B$  是有界  $\mu$ -连续集. 由 2) 有

$$B\mu_n(A) = \mu_n(A \cap B) \longrightarrow \mu(A \cap B) = B\mu(A), \quad (n \rightarrow \infty),$$

由定理 16,  $B\mu_n \xrightarrow{w} B\mu$ , 特别有

$$\mu_n f = (B\mu_n)f \longrightarrow (B\mu)f = \mu f, \quad (n \rightarrow \infty),$$

所以  $\mu_n \xrightarrow{I} \mu$ .

相应于定理 17, 我们有

**23. 定理** 在  $M$  上存在一个有界距离  $\rho_M$  使得  $(M, \rho_M)$  是完备可分距离空间. 由  $\rho_M$  所产生的拓扑正好是局部弱收敛所决定的拓扑.

**证明** 任意固定  $X$  中一点, 以这点为中心以  $j = 1, 2, \dots$  为半径作开球列  $(S_j)$ ,  $j = 1, 2, \dots$ . 又在  $\mathcal{F}$  中取一串函数  $(f_j)$  满足

$$1_{S_j} \leq f_j \leq 1_{S_{j+1}}, \quad j = 1, 2, \dots,$$

根据Urysohn引理, 这样的 $f_i$ 一定存在。

以 $M_b^{\sim}$ 记 $M_b$ 的可列无穷维乘积空间, 其上的距离 $\rho_{M_b^{\sim}}$ 取为:

$$\rho_{M_b^{\sim}}(\bar{\mu}, \bar{\nu}) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \frac{\rho_{M_b}(\mu_i, \nu_i)}{1 + \rho_{M_b}(\mu_i, \nu_i)},$$

其中 $\bar{\mu} = (\mu_1, \dots, \mu_i, \dots)$ ,  $\bar{\nu} = (\nu_1, \dots, \nu_i, \dots)$ 是 $M_b^{\sim}$ 中的元素。由于 $(M_b, \rho_{M_b})$ 是完备可分的, 所以 $(M_b^{\sim}, \rho_{M_b^{\sim}})$ 也是完备可分的。

对 $\mu \in M$ 及自然数 $j$ , 令

$$\mu^{(j)}(\cdot) = \int_{\epsilon_j} f_j d\mu, \quad (j=1, 2, \dots),$$

则 $\mu^{(j)} \in M_b$ 。映射 $J: \mu \mapsto (\mu^{(1)}, \mu^{(2)}, \dots, \mu^{(j)}, \dots)$ 是 $M$ 到 $M_b^{\sim}$ 内的一一映射。事实上, 若 $\mu, \nu \in M$ 满足条件:  $\mu^{(j)} = \nu^{(j)}, j=1, 2, \dots$ , 则必有 $\mu = \nu$ 。这因为对任意取定的 $A \in \mathcal{A}$ , 必有自然数 $j_0$ 使 $A \subset S_{j_0}$ , 由

$$\mu(A) = \int_{S_{j_0}} 1_A d\mu = \int 1_A f_{j_0} d\mu = \int 1_A f_{j_0} d\mu = \int 1_A d\mu^{(j_0)} = \int 1_A d\nu^{(j_0)} = \nu(A),$$

可知在 $\mathcal{A}$ 上 $\mu = \nu$ , 从而在 $\mathcal{M}$ 上 $\mu = \nu$ 。

现对于任意的 $\mu, \nu \in M$ , 令

$$\rho_M(\mu, \nu) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2^j} \frac{\rho_{M_b}(\mu^{(j)}, \nu^{(j)})}{1 + \rho_{M_b}(\mu^{(j)}, \nu^{(j)})},$$

易知 $\rho_M$ 是 $M$ 上的距离, 并且 $\lim_{n \rightarrow \infty} \rho_M(\mu_n, \mu_0) = 0$ 等价于 $\lim_{n \rightarrow \infty} \rho_{M_b}(\mu_n^{(j)}, \mu_0^{(j)}) = 0$ , 对一切 $j=1, 2, \dots$ 。由引理20, 知道 $M$ 中按距离 $\rho_M$ 的收敛, 就是局部弱收敛, 而且映射 $J$ 将 $(M, \rho_M)$ 嵌入 $(M_b^{\sim}, \rho_{M_b^{\sim}})$ 中。仍由引理20, 可知 $(M, \rho_M)$ 还是 $(M_b^{\sim}, \rho_{M_b^{\sim}})$ 的闭子集, 所以它还是完备可分的。

相应于定理18, 我们有

**24. 定理** 距离空间 $(M, \rho_M)$ 中的子集 $Y$ 是相对紧的, 当且仅当对任意的 $X$ 的有界闭集 $B$ 有

$$\sup_{\mu \in Y} \mu(B) < \infty,$$

并且对任意 $\varepsilon > 0$ , 存在紧集 $K_{B, \varepsilon} \subset B$ 使

$$\sup_{\mu \in Y} \mu(B \setminus K_{B, \varepsilon}) < \varepsilon.$$

**证明** 对 $j=1, 2, \dots$ , 令 $S_j$ 和 $f_j$ 如定理23中所取。又令

$$Y^{(j)} = \{\mu^{(j)} : \mu \in Y, \mu^{(j)}(\cdot) = \int_{\epsilon_j} f_j d\mu\},$$

则 $Y^{(j)} \subset M_b$ 。由引理20及定理23, 可知 $Y$ 在 $(M, \rho_M)$ 中相对紧, 当且仅当对一切 $j=1, 2,$



...,  $Y^{(j)}$  在  $(M_b, \rho_{M_b})$  中相对紧。

**必要性** 设  $B$  是  $X$  中的有界闭集, 则存在  $j_0$  使  $B \subset S_{j_0}$ 。如果  $Y$  在  $(M, \rho_M)$  中相对紧, 则  $Y^{(j_0)}$  在  $(M_b, \rho_{M_b})$  中相对紧。由定理 18 有

$$\sup_{\mu \in Y} \mu^{(j_0)}(X) < \infty,$$

且存在紧集  $K_\varepsilon$  使

$$\sup_{\mu \in Y} \mu^{(j_0)}(K_\varepsilon^c) < \varepsilon.$$

因为  $B \subset S_{j_0}$ ,  $\mu^{(j_0)}(B) = \mu(B)$ , 由上面第一个不等式得

$$\sup_{\mu \in Y} \mu(B) < \infty.$$

又记  $K_{B, \varepsilon} = B \cap K_\varepsilon$ , 则  $K_{B, \varepsilon} \subset B$  而且是紧集。于是

$$\sup_{\mu \in Y} \mu(B \setminus K_{B, \varepsilon}) \leq \sup_{\mu \in Y} \mu^{(j_0)}(K_\varepsilon^c) < \varepsilon,$$

必要性得证。

**充分性** 设  $Y$  满足定理中的条件。对任意  $j$ , 令  $B = \overline{S_{j+1}}$ , 于是  $\mu^{(j)}(X) \leq \mu(\overline{S_{j+1}})$ , 从而

$$\sup_{\mu \in Y} \mu^{(j)}(X) < \infty,$$

又取  $K_\varepsilon = K_{B, \varepsilon}$  则

$$\sup_{\mu \in Y} \mu^{(j)}(K_\varepsilon^c) = \sup_{\mu \in Y} \mu(\overline{S_{j+1}} \setminus K_{B, \varepsilon}) < \varepsilon,$$

这说明对任意  $j$ ,  $Y^{(j)}$  在  $(M_b, \rho_{M_b})$  中相对紧。证毕

对于  $(M, \rho_M)$  中子集的相对紧性, 也可以这样叙述:  $(M, \rho_M)$  的子集  $Y$  称为相对紧的, 如果  $Y$  中的任一序列  $(\mu_n) \subset Y$  必可抽出子序列  $(\mu_{n_k})$  使

$$\mu_{n_k} \xrightarrow{I} \text{某个 } \mu \in M, (k \rightarrow \infty).$$

这时也称  $Y$  是局部弱相对紧的。

下面的定理指出了弱收敛与局部弱收敛的关系。

**28. 定理** 设  $(\mu_n) \subset M_b$ ,  $\mu \in M_b$ , 则  $\mu_n \xrightarrow{w} \mu$  当且仅当  $\mu_n \xrightarrow{I} \mu$  并且  $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu_n(X) = \mu(X)$ 。

**证明** 必要性显然, 往证充分性。任给  $\varepsilon > 0$ , 由于  $\mu(X) < \infty$ , 存在紧集  $K$  使  $\mu(K^c) < \varepsilon$  (见 Billingsley (1968) 第一章定理 1.4)。类似定理 22 中 2)  $\Rightarrow$  1) 时  $F_{\delta_0}$  的选取, 可找到

包含  $K$  的有界闭集  $K_\varepsilon$  使  $\mu(\partial K_\varepsilon) = 0$ 。于是由  $\mu_n \xrightarrow{I} \mu$  推知

$$\lim_n \mu_n(K_\varepsilon) = \mu(K_\varepsilon).$$

再由  $\lim_n \mu_n(X) = \mu(X)$  及  $\mu(K_0^c) < \varepsilon$ , 可选取  $n_0$ , 使当  $n \geq n_0$  时有

$$\mu_n(K_0^c) < 3\varepsilon, \quad n \geq n_0.$$

现设  $f$  是任意有界连续函数, 不妨设  $|f| \leq C$ . 令

$$K_0 \mu_n(\cdot) = \mu_n(\cdot \cap K_0), \quad K_0 \mu(\cdot) = \mu(\cdot \cap K_0),$$

则易见

$$K_0 \mu_n \xrightarrow{w} K_0 \mu.$$

于是当  $n \geq n_0$  时,

$$\begin{aligned} \left| \int f d\mu_n - \int f d\mu \right| &\leq \left| \int_{K_0} f d\mu_n - \int_{K_0} f d\mu \right| + \left| \int_{K_0^c} f d\mu_n - \int_{K_0^c} f d\mu \right| \\ &\leq \left| \int f d(K_0 \mu_n) - \int f d(K_0 \mu) \right| + 4C\varepsilon, \end{aligned}$$

由  $K_0 \mu_n \xrightarrow{w} K_0 \mu$  及  $\varepsilon$  的任意性得,

$$\lim_n \int f d\mu_n = \int f d\mu.$$

**26. 引理** 在距离空间  $(M, \rho_M)$  中,  $N$  是闭集.

**证明** 对任意  $\mu \in M$ , 引理21中已证明  $\mathcal{A}_\mu$  是  $\mathcal{A}$  的子环. 现证明  $L_\sigma(\mathcal{A}_\mu) = \mathcal{A}$ .

设  $A$  是任意有界闭集. 令

$$A_t = \{a_1 \rho_X(a, A) \leq t\}, \quad (t > 0).$$

则  $A_t$  是包含  $A$  的有界集,  $\partial A_t \subset \{a_1 \rho_X(a, A) = t\}$ . 仍如定理22证明中  $2) \Rightarrow 1)$  可知, 存在  $t_n \downarrow 0$  使对每个  $n$ ,  $\mu(\partial A_{t_n}) = 0$ , 即每个  $A_{t_n} \in \mathcal{A}_\mu$ . 但  $A = \bigcap_n A_{t_n}$ , 可见  $L_\sigma(\mathcal{A}_\mu)$  包含一切有界闭集, 从而  $L_\sigma(\mathcal{A}_\mu) = \mathcal{A}$ .

现设  $(\mu_n) \subset N$ ,  $\mu_n \rightarrow \mu \in M$ . 我们要证  $\mu \in N$ .

令  $\Gamma = \{B \in \mathcal{A}; \mu(B) \text{ 取非负整数值}\}$ . 由定理22的2), 当  $B \in \mathcal{A}_\mu$  时,  $\lim_n \mu_n(B) = \mu(B)$ , 即  $\mu(B)$  取非负整数值, 所以  $\mathcal{A}_\mu \subset \Gamma$ . 容易验证  $\Gamma$  是局部单调类, 于是由定理5知  $\Gamma = L_\sigma(\mathcal{A}_\mu) = \mathcal{A}$ , 这说明  $\mu \in N$ . 证毕.

这样一来, 如果我们以  $\rho_N$  记  $\rho_N$  在  $N$  上的限制, 则  $(N, \rho_N)$  是  $(M, \rho_M)$  的闭子空间因而是完备可分的.

**27. 引理**  $(M, \rho_M)$  中由开集产生的  $\sigma$  代数 (Borel 集类) 与  $\mathbb{M}$  重合.

**证明** 由  $\rho_M$  的定义,  $(M, \rho_M)$  中的拓扑正好是使一切定义于  $M$  上的函数  $\mu \mapsto \int f d\mu$ ,  $f \in \mathcal{F}$  都为连续的最粗拓扑, 这里  $\mu f$  表示  $\int f d\mu$ . 因此若记  $(M, \rho_M)$  中由开集产生的  $\sigma$  代数  $\mathbb{M}'$ , 则对一切  $f \in \mathcal{F}$ , 映射  $\mu \mapsto \mu f$  是可测的.

对于  $(X, \rho_X)$  中的任意有界开集  $G$ , 由引理19, 存在  $f_n \in \mathcal{F}$  使  $1_G \geq f_n$ ,  $f_n \rightarrow 1_G$ , ( $n \rightarrow \infty$ ), 从而由于  $\mu f_n \rightarrow \mu G$ , ( $n \rightarrow \infty$ ), 推出映射  $\mu \mapsto \mu(G)$  是  $\mathbb{M}'$  可测的. 应用局部单

测类定理容易推出, 对一切  $A \in \mathcal{S}$ , 映射  $\mu \sim \mu(A)$  是  $\mathcal{M}'$  可测的, 于是由定义 8 知道  $\mathcal{M} \subset \mathcal{M}'$ . 但  $\mathcal{M}' \subset \mathcal{M}$  是显然的, 引理得证。

## §5. 淡收敛

28. 本书主要讨论和应用弱收敛与局部弱收敛的有关概念和结果, 而  $(X, \rho_X)$  恒假定是可分完备距离空间。

然而, 从点过程与随机测度的发展历史来看, 淡收敛这一概念很早就引进来了, 而且类似上节定理 22—25 的结果早已被人们所熟悉和广泛地应用。

在定义 13 中, 对可分完备距离空间上的紧有限测度给出了淡收敛的定义, 从那个定义可以看出淡收敛是比局部弱收敛更广泛的概念。然而讨论淡收敛的问题, 欲获得有意义的结果, 还得假定  $(X, \rho_X)$  是局部紧的。这一节中我们假定  $(X, \rho_X)$  是局部紧的可分完备距离空间。

这时相应于定理 22 的结果是

29. 定理 设  $(\mu_n) \subset M_X$ ,  $\mu \in M_X$ , 则下述命题等价:

- 1)  $\mu_n \xrightarrow{v} \mu$
- 2)  $\mu_n(A) \rightarrow \mu(A)$ , 对一切具有紧闭包的  $\mu$  连续集  $A$ ,
- 3)  $\limsup_n \mu_n(F) \leq \mu(F)$ , 凡闭集  $F \in \mathcal{S}_X$ ,

并且  $\liminf_n \mu_n(G) \geq \mu(G)$ , 凡开集  $G \in \mathcal{S}_X$ .

(证明见 Kallenberg (1976) A7.2)。

相应于定理 23 的结果是

30. 定理 在  $M_X$  上可引进有界距离  $\rho_{M_X}$  使  $(M_X, \rho_{M_X})$  是可分完备距离空间, 并且  $M_X$  中按  $\rho_{M_X}$  的收敛就是淡收敛。

(见 Kallenberg (1976) A7.7)。

相应于定理 24 的结果是

31. 定理  $(M_X, \rho_{M_X})$  中的子集  $Y$  是相对紧的, 当且仅当

$$\sup_{\mu \in Y} \mu(B) < \infty, \text{ 凡 } B \in \mathcal{S}_X.$$

(见 Kallenberg (1976) A7.5)。

这时也称  $Y$  是淡相对紧的。

相应于定理 25 的结果是

32. 定理 设  $(\mu_n) \in M_{\mathbb{B}}$ ,  $\mu \in M_{\mathbb{B}}$ , 则  $\mu_n \xrightarrow{v} \mu$  当且仅当  $\mu_n \xrightarrow{v} \mu$  并且  $\mu_n(X) \rightarrow \mu(X)$ ,  $(n \rightarrow \infty)$ 。

(见 Kallenberg (1976) A7.6)。

这个定理的条件与定理 25 好象是一样的, 但不能由此看出淡收敛与局部弱收敛是

一致的。例如设  $X = \{1, 2, 3, \dots\}$ ,  $\rho_X(i, j) = 1, (i \neq j)$ 。这时  $(X, \rho_X)$  是有界距离空间,  $\mu_n \xrightarrow{w} \mu$  与  $\mu_n \xrightarrow{l} \mu$  是一致的。但若令  $\mu_n = \delta_n$ ,  $\mu = 0$  则  $\mu_n \xrightarrow{w} \mu$  成立, 但  $\mu_n \xrightarrow{l} \mu$  不成立, 并注意这时  $\mu_n(X) = 1$ ,  $\mu(X) = 0$ 。

## §6. Kakutani 定理

33. 研究某类随机过程特别是具有独立增量的随机过程的绝对连续和相互奇异性时, Kakutani 定理看来是一个很有用的工具。本节叙述这个定理的一个今后我们便于采用的形式, 所述内容显然属于初等测度论, 但在一般测度论书中较少涉及。

设  $(\Omega, \mathcal{F})$  是可测空间, 以  $B(\Omega, \mathcal{F})$  表示  $\mathcal{F}$  上全体有限测度集。设  $\mu, \lambda \in B(\Omega, \mathcal{F})$ , 另外取  $\gamma \in B(\Omega, \mathcal{F})$  使  $\mu \ll \gamma, \lambda \ll \gamma$  (例如可取  $\gamma = \mu + \lambda$ , 这里  $\ll$  表示绝对连续)。令

$$K_\rho(\mu, \lambda) = \int_\Omega \sqrt{\frac{d\mu}{d\gamma} \frac{d\lambda}{d\gamma}} d\gamma,$$

其中  $\frac{d\mu}{d\gamma}, \frac{d\lambda}{d\gamma}$  分别表示  $\mu, \lambda$  相对于  $\gamma$  的 Radon-Nikodym 导数。容易证明,  $K_\rho(\mu, \lambda)$  与  $\gamma$  的选取无关。称  $K_\rho(\mu, \lambda)$  为  $\mu, \lambda$  的 Kakutani 内积。

此外令

$$K_d(\mu, \lambda) = \int_\Omega \left( \sqrt{\frac{d\mu}{d\gamma}} - \sqrt{\frac{d\lambda}{d\gamma}} \right)^2 d\gamma,$$

并称为  $\mu, \lambda$  的 Kakutani 距离。

特别当  $\mu \ll \lambda$ , 则在上图  $\gamma$  为  $\lambda$ , 并记  $\frac{d\mu}{d\lambda} = f$

则

$$K_\rho(\mu, \lambda) = \int_\Omega \sqrt{f} d\lambda, \quad K_d(\mu, \lambda) = \left( \int_\Omega (\sqrt{f} - 1)^2 d\lambda \right)^{\frac{1}{2}}.$$

由简单的计算得出

$$(K_d(\mu, \lambda))^2 = \mu(\Omega) + \lambda(\Omega) - 2K_\rho(\mu, \lambda),$$

特别, 当  $\mu, \lambda$  都是  $(\Omega, \mathcal{F})$  上的概率测度时, 有

$$(K_d(\mu, \lambda))^2 = 2(1 - K_\rho(\mu, \lambda)).$$

34. 引理 如果  $\mu, \lambda$  都是  $(\Omega, \mathcal{F})$  上的概率测度, 则

$$\|\mu - \lambda\| \geq 2(1 - K_\rho(\mu, \lambda)) = (K_d(\mu, \lambda))^2.$$

其中  $\|\mu - \lambda\|$  是广义测度  $\mu - \lambda$  的全变差。

证明 任取  $\gamma$  使  $\mu \ll \gamma, \lambda \ll \gamma$  并且  $\mu, \lambda$  相对于  $\gamma$  的 Radon-Nikodym 导数记为  $f, g$ , 则

$$\begin{aligned} 2(1 - K_\rho(\mu, \lambda)) &= \int_\Omega (f + g - 2\sqrt{fg}) \gamma(dw) = \int_\Omega (\sqrt{f} - \sqrt{g})^2 \gamma(dw) \\ &\leq \int_\Omega (\sqrt{f} + \sqrt{g}) |\sqrt{f} - \sqrt{g}| \gamma(dw) = \int_\Omega |f - g| \gamma(dw) = \|\mu - \lambda\|. \end{aligned}$$

35. 引理 如果  $\mu, \lambda$  都是  $(\Omega, \mathcal{F})$  上的概率测度, 则

$$\|\mu - \lambda\| \leq \sqrt{8(1 - K_D(\mu, \lambda))} = 2K_D(\mu, \lambda).$$

证明 首先, 设  $x, y$  是实数, 则

$$\begin{aligned} (\sin^2 x - \sin^2 y)^2 &= (\sin x - \sin y)^2 (\sin x + \sin y)^2 \\ &= 4 \left( \sin \frac{x-y}{2} \right)^2 \left( 2 \sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2} \right)^2 (\cos \frac{x-y}{2})^2 \\ &\leq 2(1 - \cos(x-y))(\sin(x+y))^2 \leq 2(1 - \cos(x-y)) \\ &= 2(1 - \cos x \cos y - \sin x \sin y). \end{aligned}$$

因此如果  $0 \leq a \leq 1, 0 \leq b \leq 1$ , 令  $\sqrt{a} = \sin x, \sqrt{b} = \sin y$ , 则

$$(a-b)^2 \leq 2(1 - \sqrt{ab} - \sqrt{(1-a)(1-b)}).$$

现设  $\gamma \in B(\Omega, \mathcal{F})$  并且  $\mu \ll \gamma, \lambda \ll \gamma, f = \frac{d\mu}{d\gamma}, g = \frac{d\lambda}{d\gamma}$ , 且令

$$\Omega_0 = \{\omega: f(\omega) \leq g(\omega)\}.$$

由 Schwarz 不等式, 有

$$\begin{aligned} 1 - K_D(\mu, \lambda) &= 1 - \int_{\Omega} \sqrt{fg} \gamma(d\omega) = 1 - \int_{\Omega_0} \sqrt{fg} \gamma(d\omega) - \int_{\Omega \setminus \Omega_0} \sqrt{fg} \gamma(d\omega) \\ &\geq 1 - \sqrt{\int_{\Omega_0} f \gamma(d\omega) \int_{\Omega_0} g \gamma(d\omega)} - \sqrt{\int_{\Omega \setminus \Omega_0} f \gamma(d\omega) \int_{\Omega \setminus \Omega_0} g \gamma(d\omega)} \\ &\geq 1 - \sqrt{\mu(\Omega_0) \lambda(\Omega_0)} - \sqrt{\mu(\Omega \setminus \Omega_0) \lambda(\Omega \setminus \Omega_0)}. \end{aligned}$$

应用上面的不等式, 就得

$$2(1 - K_D(\mu, \lambda)) \geq (\mu(\Omega_0) - \lambda(\Omega_0))^2.$$

另一方面, 由范数  $\|\cdot\|$  的定义, 有

$$\begin{aligned} \|\mu - \lambda\| &= (\mu - \lambda)^+(\Omega) + (\mu - \lambda)^-(\Omega) = \int_{\Omega_0} (g - f) \gamma(d\omega) + \int_{\Omega \setminus \Omega_0} (f - g) \gamma(d\omega) \\ &= \lambda(\Omega_0) - \mu(\Omega_0) + \mu(\Omega \setminus \Omega_0) - \lambda(\Omega \setminus \Omega_0) = 2(\lambda(\Omega_0) - \mu(\Omega_0)). \end{aligned}$$

综合上面两个结果, 就得

$$\|\mu - \lambda\| \leq 2\sqrt{2(1 - K_D(\mu, \lambda))} = 2K_D(\mu, \lambda). \quad \text{证毕.}$$

由引理 34, 35 得: 如果  $\mu, \lambda$  是概率测度, 则

$$(K_D(\mu, \lambda))^2 \leq \|\mu - \lambda\| \leq 2K_D(\mu, \lambda).$$

36. 引理 设  $\mu, \lambda \in B(\Omega, \mathcal{F})$ , 则  $\mu \perp \lambda$  ( $\mu$  与  $\lambda$  相互奇异) 当且仅当  $K_D(\mu, \lambda) = 0$ .

证明 设  $K_D(\mu, \lambda) = 0$ , 取  $\gamma \in B(\Omega, \mathcal{F})$  使  $\mu \ll \gamma, \lambda \ll \gamma$ , 令  $\Omega_0 = \{\omega: \frac{d\mu}{d\gamma} = 0\}$ , 则

$$\mu(\Omega_0) = \int_{\Omega_0} \frac{d\mu}{d\gamma} d\gamma = 0.$$

由于  $K_D(\mu, \lambda) = 0$ , 所以在  $\Omega \setminus \Omega_0$  上  $\frac{d\lambda}{d\gamma} = 0$  (a.e.  $\gamma$ ), 故  $\lambda(\Omega \setminus \Omega_0) = 0$  即  $\mu \perp \lambda$ .

反之, 设  $\mu \perp \lambda$ , 则存在  $\Omega_0$  使  $\mu(\Omega_0) = 0, \lambda(\Omega \setminus \Omega_0) = 0$ , 于是  $\frac{d\mu}{d\gamma} \cdot \frac{d\lambda}{d\gamma} = 0$  (a.e.  $\gamma$ ).

37. 引理 设  $\mu, \lambda \in B(\Omega, \mathcal{F})$ , 则  $\mu \perp \lambda$  当且仅当, 对任意的  $\varepsilon > 0$ , 存在  $\Omega_\varepsilon \in \mathcal{F}$  使  $\mu(\Omega_\varepsilon) < \varepsilon, \lambda(\Omega \setminus \Omega_\varepsilon) < \varepsilon$ .

**证明** 必要性是显然的。往证充分性。假定已经选好了满足条件的  $\Omega_{\frac{1}{2^n}}, n=1, 2, \dots$

令  $\Omega_0 = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} \Omega_{\frac{1}{2^k}}$ , 则显然有

$$\mu(\Omega_0) = \lim_m \mu\left(\bigcup_{k=m}^{\infty} \Omega_{\frac{1}{2^k}}\right) \leq \lim_m \sum_{k=m}^{\infty} \frac{1}{2^k} = 0,$$

以及

$$\begin{aligned} \lambda(\Omega \setminus \Omega_0) &= \lambda\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} (\Omega \setminus \Omega_{\frac{1}{2^k}})\right) = \lim_m \lambda\left(\bigcap_{k=m}^{\infty} (\Omega \setminus \Omega_{\frac{1}{2^k}})\right) \\ &\leq \lim_m \lambda(\Omega \setminus \Omega_{\frac{1}{2^m}}) = 0, \end{aligned}$$

于是  $\mu \perp \lambda$ .

**38. 引理** 设  $(\Omega_k, \mathcal{F}_k)$ ,  $1 \leq k \leq m$ , 是  $m$  个可测空间, 它们的乘积空间为

$$(\Omega, \mathcal{F}) = \left( \prod_{k=1}^m \Omega_k, \prod_{k=1}^m \mathcal{F}_k \right),$$

假定  $\mu_k, \lambda_k \in B(\Omega_k, \mathcal{F}_k)$ , 并令

$$\mu = \prod_{k=1}^m \mu_k, \quad \lambda = \prod_{k=1}^m \lambda_k.$$

则有

$$K_\rho(\mu, \lambda) = \prod_{k=1}^m K_\rho(\mu_k, \lambda_k).$$

**证明** 令  $\gamma_k = \mu_k + \lambda_k$ , 则  $\mu_k \ll \gamma_k, \lambda_k \ll \gamma_k, 1 \leq k \leq m$ . 又记  $\gamma = \prod_{k=1}^m \gamma_k$ . 任取  $A_k \in \mathcal{F}_k, 1 \leq k \leq m$ , 则

$$\begin{aligned} \mu(A_1 \times \dots \times A_m) &= \prod_{k=1}^m \int_{A_k} \mu_k(d\omega_k) = \prod_{k=1}^m \int_{A_k} \frac{d\mu_k}{d\gamma_k} \gamma_k(d\omega_k) \\ &= \int_{A_1 \times \dots \times A_m} \left( \prod_{k=1}^m \frac{d\mu_k}{d\gamma_k} \right) \gamma(d\omega_1 \times \dots \times d\omega_m), \end{aligned}$$

既然在  $\prod_{k=1}^m \mathcal{F}_k$  中的所有可测矩形上有

$$\mu(\cdot) = \int_{(\cdot)} \left( \prod_{k=1}^m \frac{d\mu_k}{d\gamma_k} \right) \gamma(d\omega_1 \times \dots \times d\omega_m),$$

并且所有可测矩形作成  $\pi$ -系, 所以应用  $\lambda$ -系方法可知上式在  $\prod_{k=1}^m \mathcal{F}_k$  上也成立. 所以

$$\mu \ll \gamma \text{ 并且 } \frac{d\mu}{d\gamma} = \prod_{k=1}^m \frac{d\mu_k}{d\gamma_k}, \quad ((\sigma, \sigma, \gamma))$$

同样可知

$$\lambda \ll \gamma \text{ 并且 } \frac{d\lambda}{d\gamma} = \prod_{k=1}^m \frac{d\lambda_k}{d\gamma_k}, \quad (a, c, \gamma),$$

于是

$$\begin{aligned} K_P(\mu, \lambda) &= \int \sqrt{\frac{d\mu}{d\gamma} \cdot \frac{d\lambda}{d\gamma}} d\gamma = \int \sqrt{\prod_{k=1}^m \frac{d\mu_k}{d\gamma_k} \cdot \prod_{k=1}^m \frac{d\lambda_k}{d\gamma_k}} d\gamma \\ &= \int \prod_{k=1}^m \sqrt{\frac{d\mu_k}{d\gamma_k} \cdot \frac{d\lambda_k}{d\gamma_k}} \left( \prod_{k=1}^m \gamma_k \right) (d\omega_1 \times \dots \times d\omega_m) \\ &= \prod_{k=1}^m \int \sqrt{\frac{d\mu_k}{d\gamma_k} \cdot \frac{d\lambda_k}{d\gamma_k}} \gamma_k (d\omega_k) = \prod_{k=1}^m K_P(\mu_k, \lambda_k). \end{aligned}$$

下面的定理是引进Kakutani内积后最重要的结果。这里的叙述不但改进了 Kakutani定理原来的结果，而且证明简化了。

**39. 定理 (Kakutani)** 设 $(\Omega_k, \mathcal{F}_k)$ ,  $k=1, 2, \dots$ , 是一列可测空间,  $\mu_k, \lambda_k$  是 $(\Omega_k, \mathcal{F}_k)$ 上的概率测度。记

$$(\Omega, \mathcal{F}) = \left( \bigotimes_{k=1}^{\infty} \Omega_k, \bigotimes_{k=1}^{\infty} \mathcal{F}_k \right), \quad \mu = \bigotimes_{k=1}^{\infty} \mu_k, \quad \lambda = \bigotimes_{k=1}^{\infty} \lambda_k,$$

则有

- 1)  $K_P(\mu, \lambda) = \prod_{k=1}^{\infty} K_P(\mu_k, \lambda_k)$ ;
- 2)  $\mu \perp \lambda$  当且仅当  $\prod_{k=1}^{\infty} K_P(\mu_k, \lambda_k) = 0$ ;
- 3)  $\mu \ll \lambda$  当且仅当  $\prod_{k=1}^{\infty} K_P(\mu_k, \lambda_k) > 0$ , 并且对一切 $k$ ,  $\mu_k \ll \lambda_k$ .

**证明** 1) 记

$$(\Omega^{(n)}, \mathcal{F}^{(n)}) = \left( \bigotimes_{k=1}^n \Omega_k, \bigotimes_{k=1}^n \mathcal{F}_k \right),$$

$$\mu^{(n)} = \bigotimes_{k=1}^n \mu_k, \quad \lambda^{(n)} = \bigotimes_{k=1}^n \lambda_k.$$

则当 $n \rightarrow \infty$ 时,  $K_P(\mu^{(n)}, \lambda^{(n)}) = \prod_{k=1}^n K_P(\mu_k, \lambda_k)$ 或者发散到0, 或者收敛于某个正数。

首先假定  $\lim_{n \rightarrow \infty} K_P(\mu^{(n)}, \lambda^{(n)}) = 0$ 。这时对任意的正数 $\varepsilon$ , 存在自然数 $n$ 使

$$K_P(\mu^{(n)}, \lambda^{(n)}) < \varepsilon.$$

取 $\gamma^{(n)} \in B\left(\bigotimes_{k=1}^n \Omega_k, \bigotimes_{k=1}^n \mathcal{F}_k\right)$ 使 $\mu^{(n)} \ll \gamma^{(n)}$ ,  $\lambda^{(n)} \ll \gamma^{(n)}$ , 令

$$A^{(n)} = \left\{ \omega^{(n)} : \omega^{(n)} \in \bigcap_{k=1}^n \Omega_k, \quad \frac{d\mu^{(n)}}{d\gamma^{(n)}}(\omega^{(n)}) \leq \frac{d\lambda^{(n)}}{d\gamma^{(n)}}(\omega^{(n)}) \right\},$$

则有

$$\begin{aligned} \mu^{(n)}(A^{(n)}) &= \int_{A^{(n)}} \frac{d\mu^{(n)}}{d\gamma^{(n)}} d\gamma^{(n)} \leq \int_{A^{(n)}} \sqrt{\frac{d\mu^{(n)}}{d\gamma^{(n)}} \frac{d\mu^{(n)}}{d\gamma^{(n)}}} d\gamma^{(n)} \\ &\leq K\rho(\mu^{(n)}, \lambda^{(n)}) < \varepsilon, \end{aligned}$$

而在  $\Omega^{(n)} \setminus A^{(n)}$  上,  $\frac{d\mu^{(n)}}{d\gamma^{(n)}} \geq \frac{d\lambda^{(n)}}{d\gamma^{(n)}}$ , 也有

$$\lambda^{(n)}(\Omega^{(n)} \setminus A^{(n)}) < \varepsilon.$$

现在考虑  $(\Omega, \mathcal{F})$  中的柱集

$$A_n = \{ \omega : \omega^{(n)} \in A^{(n)} \},$$

则有

$$\mu(A_n) < \varepsilon, \quad \lambda(A_n^c) < \varepsilon,$$

由引理37知  $\mu \perp \lambda$ , 从而  $K\rho(\mu, \lambda) = \prod_{k=1}^{\infty} K\rho(\mu_k, \lambda_k) = 0$ .

现在假定  $\prod_{k=1}^{\infty} K\rho(\mu_k, \lambda_k) > 0$ . 这时我们选定正数序列  $\varepsilon_k$ , 使  $0 < \varepsilon_k < 1$ , 并且

$$\prod_{k=1}^{\infty} \sqrt{1 - \varepsilon_k} = \lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{k=1}^n \sqrt{1 - \varepsilon_k} > 0.$$

令

$$\gamma_k = \begin{cases} \lambda_k, & \text{当 } \mu_k \ll \lambda_k \\ \varepsilon_k \mu_k + (1 - \varepsilon_k) \lambda_k, & \text{其余.} \end{cases} \quad (k=1, 2, \dots)$$

于是  $\gamma_k$  是  $(\Omega_k, \mathcal{F}_k)$  上的概率测度, 而且  $\lambda_k \ll \gamma_k$ , 又有

$$(1 - \varepsilon_k) \frac{d\lambda_k}{d\gamma_k} \leq 1 \quad (a.e. \gamma_k), \quad (k=1, 2, \dots),$$

于是得

$$K\rho(\mu_k, \gamma_k) = \int \sqrt{\frac{d\mu_k}{d\gamma_k}} d\gamma_k \geq \int \sqrt{\frac{d\mu_k}{d\gamma_k} (1 - \varepsilon_k)} \frac{d\lambda_k}{d\gamma_k} d\gamma_k = \sqrt{1 - \varepsilon_k} K\rho(\mu_k, \lambda_k),$$

从而

$$\prod_{k=1}^{\infty} K\rho(\mu_k, \gamma_k) = \lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{k=1}^n K\rho(\mu_k, \gamma_k) \geq \lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{k=1}^n \sqrt{1 - \varepsilon_k} K\rho(\mu_k, \lambda_k) > 0.$$

现记

$$\gamma^{(n)} = \bigotimes_{k=1}^n \gamma_k, \quad \gamma = \bigotimes_{k=1}^{\infty} \gamma_k,$$

并令

$$\phi_n = \sqrt{\frac{d\mu^{(n)}}{d\gamma^{(n)}}} = \prod_{k=1}^n \sqrt{\frac{d\mu_k}{d\gamma_k}},$$



则 $\phi_n$ 可看作 $(\Omega, \mathcal{T})$ 上的函数, 而且

$$\int_{\Omega^{(n)}} \phi_n^2 d\gamma^{(n)} = \int_{\Omega} \phi_n^2 d\gamma = 1,$$

而当 $m > n$ 时有

$$\int_{\Omega} (\phi_m - \phi_n)^2 d\gamma = 2(1 - \int_{\Omega} \phi_m \phi_n d\gamma).$$

容易算得

$$\int_{\Omega} \phi_m \phi_n d\gamma = \int_{\Omega} \sqrt{\frac{d\mu^{(n)}}{d\gamma^{(n)}}} \frac{d\mu^{(m)}}{d\gamma^{(m)}} d\gamma^{(m)} = \prod_{k=n+1}^m K\rho(\mu_k, \nu_k),$$

由于 $\prod_{k=1}^{\infty} K\rho(\mu_k, \nu_k)$ 收敛, 故

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \prod_{k=n+1}^m K\rho(\mu_k, \nu_k) = 1.$$

这说明 $(\phi_n)$ 在 $(\Omega, \mathcal{T}, \gamma)$ 中均方收敛, 令其极限为 $\phi$ . 现对任意的 $A \in \mathcal{A}^{(n)} \in \mathcal{T}^{(n)}$ , 当 $m > n$ 时记

$$A^{(m)} = \{\omega^{(m)}; \omega^{(n)} \in A\},$$

$$A = \{\omega; \omega \in \Omega, \omega^{(n)} \in A^{(n)}\}.$$

则

$$\mu(A) = \lim_{(m \rightarrow \infty, \omega \in A)} \mu^{(m)}(A^{(m)}) = \int_A \phi^2 d\gamma,$$

上式对一切 $\mathcal{T}$ 中的柱集成立, 自然对一切 $A \in \mathcal{T}$ 成立, 故 $\mu \ll \gamma$ 并且 $\frac{d\mu}{d\gamma} = \phi^2$ .

下面再考虑 $K\rho(\lambda_h, \nu_h)$ , 由于

$$K\rho(\lambda_h, \nu_h) = \int \sqrt{\frac{d\lambda_h}{d\nu_h}} d\nu_h \geq \int \sqrt{\frac{d\lambda_h}{d\gamma_h} (1 - \varepsilon_h)} \frac{d\lambda_h}{d\gamma_h} d\gamma_h \geq \sqrt{1 - \varepsilon_h} \int \frac{d\lambda_h}{d\gamma_h} d\gamma_h,$$

并且由于 $\prod_{k=1}^{\infty} \sqrt{1 - \varepsilon_k}$ 收敛, 知 $\prod_{k=1}^{\infty} K\rho(\lambda_k, \nu_k) > 0$ , 令

$$\varphi_n = \sqrt{\frac{d\lambda^{(n)}}{d\gamma^{(n)}}},$$

重复上面的证法, 知 $(\varphi_n)$ 是 $(\Omega, \mathcal{T}, \gamma)$ 中的均方收敛序列, 设其极限为 $\varphi$ , 则 $\lambda \ll \gamma$ ,  $\frac{d\lambda}{d\gamma} = \varphi^2$ .

于是我们得到

$$\begin{aligned} K\rho(\mu, \lambda) &= \int \phi \varphi d\gamma = \lim_n \int \phi_n \varphi_n d\gamma = \lim_n \int \sqrt{\frac{d\mu^{(n)}}{d\gamma^{(n)}}} \frac{d\lambda^{(n)}}{d\gamma^{(n)}} d\gamma^{(n)} \\ &= \lim_n K\rho(\mu^{(n)}, \lambda^{(n)}) = \lim_n \prod_{k=1}^n K\rho(\mu_k, \lambda_k), \end{aligned}$$

从而证明了1),

2) 由引理36,  $\mu \perp \lambda$  当且仅当  $K_\rho(\mu, \lambda) = 0$ , 由1)即得证2);

3) 当  $\prod_{k=1}^{\infty} K_\rho(\mu_k, \lambda_k) > 0$  并且对一切  $k$ ,  $\mu_k \ll \lambda_k$  时, 在上面1)的证明中取  $\nu_k = \lambda_k$ ,  $k =$

$1, 2, \dots$ , 则  $\gamma = \lambda$  故  $\mu \ll \lambda$ ; 反之, 如果  $\mu \ll \lambda$ , 由2)知  $\prod_{k=1}^{\infty} K_\rho(\mu_k, \lambda_k) > 0$ , 而且若考虑柱集

$$A \times \prod_{i=1}^n \Omega_i, \quad A \in \mathcal{F}_k, \quad (k=1, 2, \dots),$$

则易推出  $\mu_k \ll \lambda_k, k=1, 2, \dots$ . 定理证毕.

## §7. Kolmogorov定理

**40. 定义 (Kolmogorov相容族)** 设  $A$  是任意指标集,  $\{(\Omega_t, \mathcal{F}_t), t \in A\}$  是一族可测空间. 设  $T \subset A$ , 按通常的办法定义乘积空间

$$\left( \prod_{t \in T} \Omega_t, \prod_{t \in T} \mathcal{F}_t \right),$$

当  $T_1 \subset T_2 \subset A$  时,  $\left( \prod_{t \in T_1} \Omega_t, \prod_{t \in T_1} \mathcal{F}_t \right)$  看作是空间  $\left( \prod_{t \in T_2} \Omega_t, \prod_{t \in T_2} \mathcal{F}_t \right)$  的投影.

如果对于任意  $A$  的有限子集  $T$ , 在  $\left( \prod_{t \in T} \Omega_t, \prod_{t \in T} \mathcal{F}_t \right)$  上给定了概率测度  $P_T$ , 而且满足条件:

若  $T_1 \subset T_2$  都是  $A$  的有限子集, 则  $P_{T_2}$  在  $\left( \prod_{t \in T_1} \Omega_t, \prod_{t \in T_1} \mathcal{F}_t \right)$  上的限制就是  $P_{T_1}$ ; 则称概率

分布族

$$\{P_T, T \subset A, T \text{ 是有限集}\}$$

是Kolmogorov相容族.

**41. 定理 (Kolmogorov)** 设  $A$  是任意指标集,  $\{X_t, t \in A\}$  是一族可分完备距离空间, 以  $\mathcal{M}(X_t)$  记  $X_t$  的Borel集类. 若对任意  $A$  的有限子集  $T$ , 在  $\left( \prod_{t \in T} X_t, \prod_{t \in T} \mathcal{M}(X_t) \right)$  上给定了概率测度  $P_T$ , 而且  $\{P_T, T \subset A, T \text{ 有限}\}$  是Kolmogorov相容族, 则在空间  $\left( \prod_{t \in A} X_t, \prod_{t \in A} \mathcal{M}(X_t) \right)$  上存在唯一的概率测度  $P$ ,  $P$  在  $\left( \prod_{t \in T} X_t, \prod_{t \in T} \mathcal{M}(X_t) \right), (T \subset A \text{ 有限})$  上的限制就是给定的  $P_T$ .

本定理参看J. Neveu(1965) II.3的定理及命题 II.7.3.

## 第二章 点过程基础

这一章详细叙述点过程理论的一些基本概念和方法。存在定理是研究点过程的基础,这里给出了详细的证明。简单性,有序性和无后效性是最早引入点过程的重要概念,本章力求对有关结果给出完整的叙述。Laplace泛函是研究点过程的基本工具,收敛性是点过程理论的基本内容。卷积以及 $\mathcal{P}_n$ 型分布对于研究无穷可分点过程是必不可少的工具,最后还讨论了点过程的稀疏。

### §1. 记号和定义

1. 记号 先回忆第一章中引入的记号。我们恒以 $(X, \rho_X)$ 表示任意的可分完备距离空间,在没有特别说明时,也就不再附加别的条件。以 $\mathcal{M}$ 记 $X$ 的Borel集类,  $\mathcal{M}$ 记全体有界的Borel集。

以 $M$ 记 $(X, \mathcal{M})$ 上全体局部有限测度,  $(M, \rho_M)$ 是由定理I.23所确定的可分完备有界距离空间; 以 $\mathbb{M}$ 记 $(M, \rho_M)$ 上的Borel集类, 由定理I.23可知它就是定义I.8所引进的 $\sigma$ 代数。可测空间 $(M, \mathbb{M})$ 称为局部有限测度空间。

我们还以 $M_b$ 记 $(X, \mathcal{M})$ 上全体有限测度。在定理I.17中定义了可分完备距离空间 $(M_b, \rho_{M_b})$ 。

以 $N$ 记 $(X, \mathcal{M})$ 上全体计数测度。由引理I.26,  $N$ 是 $(M, \rho_M)$ 中的闭子集, 于是 $N \in \mathbb{M}$ 。将 $\rho_M$ 限制在 $N$ 上记为 $\rho_N$ , 则 $(N, \rho_N)$ 也是可分完备有界距离空间。令 $\mathbb{N} = N \cap \mathbb{M}$ , 称 $(N, \mathbb{N})$ 为计数测度空间。

我们恒以 $\mathcal{F}_b$ 记 $(X, \rho_X)$ 上的有界连续函数全体, 而以 $\mathcal{F}$ 记其中具有有界支撑的全体有界连续函数。

一般地我们使用 $A, B, C, \dots$ 表示 $X$ 的子集, 特别是 $\mathcal{M}$ 可测的子集; 而常以 $\mu, \nu, \lambda, \gamma, \dots$ 表示局部有限测度或计数测度。对于 $M$ 或 $N$ 的子集常以 $U, V, W, Y, Z, \dots$ 表示, 特别常用来表示 $\mathbb{M}$ 或 $\mathbb{N}$ 中的元素。

对于任意的 $\mu \in M, A \in \mathcal{M}$ , 以 $A\mu$ 记 $\mu$ 在 $A$ 上的限制(见I.11)而以 $A_M \mathbb{M}$ 及 $A_N \mathbb{N}$ 分别表 $M$ 及 $N$ 上由这些限制产生的 $\sigma$ 代数。

在测度论中 $\sigma(\Gamma)$ 常表示由集类 $\Gamma$ 产生的最小 $\sigma$ 代数;  $m(\Gamma)$ 常表示由 $\Gamma$ 所产生的最小单调类。我们以 $L_\sigma(\Gamma)$ 表示由 $\Gamma \subset \mathcal{M}$ 所产生的最小局部 $\sigma$ 环, 而以 $L_m(\Gamma)$ 表示由 $\Gamma \subset \mathcal{M}$ 所产生的最小局部单调类。这些记号今后将常用。

2. 定义 设 $(Q, \mathcal{F}, P)$ 是任意概率空间, 由 $(Q, \mathcal{F}, P)$ 到 $(M, \mathbb{M})$ 的任意可测映像 $\xi$ , 称为随机测度; 由 $(Q, \mathcal{F}, P)$ 到 $(N, \mathbb{N})$ 的任意可测映像 $\xi$ , 称为随机点过程(简称为点过程)。

特别, 在 $(M, \mathbb{M})$ 上任意给定一概率测度 $P$ , 由 $(M, \mathbb{M}, P)$ 到 $(M, \mathbb{M})$ 的恒等映像就是

一随机测度；而在 $(N, N)$ 上任意给定一个概率测度 $P$ ，由 $(N, N, P)$ 到 $(N, N)$ 的恒等映像就是一点过程。

$(M, M)$ 上的一切概率测度记为 $\mathcal{P}_M(N, N)$ 上的一切概率测度记为 $\mathcal{P}_N$ ，当 $P \in \mathcal{P}_N$ 时，也称 $P$ 为点分布。

对于给定的随机测度(或点过程) $\xi$ ，可以认为它是 $\Omega \times \mathcal{A}$ 上的二元函数， $\xi = \xi(\omega, A)$ ， $\omega \in \Omega, A \in \mathcal{A}$ 。于是当 $A \in \mathcal{A}$ 固定时，作为 $\omega$ 的函数， $\xi(\omega, A)$ 是 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 上的随机变量，以 $\xi(A)$ 记之；而当 $\omega \in \Omega$ 固定时，作为定义在 $\mathcal{A}$ 上的集函数， $\xi(\omega, A)$ 是 $\mathcal{A}$ 上的局部有限测度，以 $\xi(\omega)$ 记之， $\xi(\omega) \in M$ 。对于任意 $\mathcal{A}$ 可测的非负函数，积分 $\int f(\sigma) \xi(\omega, d\sigma)$ 对于一切 $\omega \in \Omega$ 有意义，而且作为 $\omega$ 的函数是 $\mathcal{F}$ 可测的，记之为 $\xi f$ ，特别当 $f = 1_A, A \in \mathcal{A}$ 时， $\xi f$ 就是上面引入的 $\xi(A)$ ，称 $P\xi^{-1}(\cdot) = P(\xi \in \cdot)$ 为 $\xi$ 的分布。

基本概率空间 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 将永远假定是固定的，今后不再标出。这里的字母 $P$ ，既是 $\mathcal{F}$ 上的概率测度，有时也用 $P$ 表示 $(M, M)$ (或 $(N, N)$ )上的概率测度，但注明 $P \in \mathcal{P}_M$ (或 $P \in \mathcal{P}_N$ )。

3. 设 $k \geq 1, A_1, \dots, A_k \in \mathcal{A}$ 。由 $\sigma$ 代数 $M$ (或 $N$ )的构造可知，映射

$$\pi_{A_1, \dots, A_k} : M \rightarrow (M(A_1), \dots, M(A_k))$$

是由 $M$ (或 $N$ )到 $R_+^k$ (或 $Z_+^k$ )中的可测映射，这里 $R_+$ 表示 $[0, \infty)$ ， $Z_+$ 表示 $\{0, 1, 2, \dots\}$ 。

设 $P \in \mathcal{P}_M$ (或 $\mathcal{P}_N$ )，以 $P_{A_1, \dots, A_k}$ 表示在映射 $\pi_{A_1, \dots, A_k}$ 之下， $P$ 在 $R_+^k$ (或 $Z_+^k$ )上的导出测度。当 $k$ 取遍所有自然数，而 $A_1, \dots, A_k$ 在 $\mathcal{A}$ 中变动时，由此得到的概率分布族

$$\{P_{A_1, \dots, A_k} : k = 1, 2, \dots, A_1, \dots, A_k \in \mathcal{A}\}$$

称为 $P$ 的有限维分布族。

当 $P \in \mathcal{P}_M$ (或 $\mathcal{P}_N$ )是某个随机测度(或点过程) $\xi$ 的分布时， $P_{A_1, \dots, A_k}$ 就是随机向量 $(\xi(A_1), \dots, \xi(A_k))$ 的概率分布。

$M$ 中由变换 $\pi_{A_1, \dots, A_k}$ 所产生的 $\sigma$ 代数记为 $M_{A_1, \dots, A_k}$ ， $N$ 中由变换 $\pi_{A_1, \dots, A_k}$ 所产生的 $\sigma$ 代数记为 $N_{A_1, \dots, A_k}$ 。

4. 引理 设 $\Gamma \subset \mathcal{A}$ 是半环，并且 $L_\sigma(\Gamma) = \mathcal{A}$ 。记

$$\tilde{M} = \bigcup_{A_1, \dots, A_m} M_{A_1, \dots, A_m}, \quad \tilde{N} = \bigcup_{A_1, \dots, A_m} N_{A_1, \dots, A_m}$$

这里 $A_1, \dots, A_m$ 跑遍 $\Gamma$ 中一切互不相交的有限集族，则 $\tilde{M}$ 和 $\tilde{N}$ 是代数，并且 $\sigma(\tilde{M}) = M$ ， $\sigma(\tilde{N}) = N$ 。

证明 先证明 $\tilde{M}$ 是代数，为此只要证明：对于 $\Gamma$ 中任意不相交的 $A_1, \dots, A_k$ 以及任意不相交的 $B_1, \dots, B_m$ ，存在 $\Gamma$ 中不相交的 $A'_1, \dots, A'_m$ ，使

$$M_{A_1, \dots, A_k} \cup M_{B_1, \dots, B_m} \subset M_{A'_1, \dots, A'_m} \quad (1)$$

由于 $\Gamma$ 所产生的环就是 $\Gamma$ 中元素的全体有限不交并, 所以不失一般性, 可以假定 $\Gamma$ 本身是环。这时  $A'_1, \dots, A'_m$  可取为如下的

$$A_i \cap B_j, A_i \setminus B_j, B_j \setminus A_i, \quad i=1, 2, \dots, k, j=1, 2, \dots, s,$$

这里  $A = \bigcup_{i=1}^k A_i, B = \bigcup_{j=1}^s B_j$ 。显然如此取定的  $A'_1, \dots, A'_m$  属于环 $\Gamma$ , 并且每一  $A_i, B_j (1 \leq i \leq k, 1 \leq j \leq s)$  都可用  $A'_1, \dots, A'_m$  中的成员表为不交并, 所以(1)式成立。

现设  $\Gamma_1 \subset \mathcal{A}$  满足条件:  $A \in \Gamma_1$  当且仅当映射  $\mu \mapsto \mu(A)$  是  $\sigma(\tilde{\mathcal{M}})$  可测的。显然  $\Gamma_1$  包含环 $\Gamma$ , 并且容易验证  $\Gamma_1$  是局部单调类, 于是  $\Gamma_1 = \mathcal{A}$ 。由于  $\tilde{\mathcal{M}}$  是使所有映射  $\mu \mapsto \mu(A), A \in \mathcal{A}$  都为可测的最小  $\sigma$  代数, 故  $\sigma(\tilde{\mathcal{M}}) \supset \tilde{\mathcal{M}}$ , 但反方向的包含关系是明显的。对于  $\tilde{\mathcal{N}}$  的结论可类似得出。

上述引理直接给出如下的推论:

**5. 推论** 设  $P, Q \in \mathcal{P}_N$  (或  $\mathcal{P}_N$ ), 又设  $\Gamma \subset \mathcal{A}$  是半环并且  $L_\sigma(\Gamma) = \mathcal{A}$ 。如果对于任意互不相交的  $A_1, \dots, A_m \in \Gamma$  有

$$P_{A_1, \dots, A_m} = Q_{A_1, \dots, A_m},$$

则  $P = Q$ 。

**6. 记号的补充说明** 本书将涉及很多具体的空间, 我们作如下的约定。

一般地总假定  $(X, \rho_X)$  是一个未经具体指出的抽象空间, 对于它, 前面引入的一切记号照旧。而对于某个具体指明的空间, 对于前面引入的记号, 我们以空间本身具体标明。例如, 设  $R^m$  是  $m$  维欧氏空间, 我们以

$\mathcal{A}(R^m)$  表示  $R^m$  中全体 Borel 集;

$\mathcal{B}(R^m)$  表示  $R^m$  中全体有界 Borel 集;

$\mathcal{F}_b(R^m)$  表示  $R^m$  上的全体有界连续函数;

$\mathcal{F}(R^m)$  表示  $R^m$  上的全体有界支撑的有界连续函数;

$M(R^m)$  表示  $R^m$  上全体局部有限测度;

$N(R^m)$  表示  $R^m$  上全体计数测度;

$\tilde{\mathcal{M}}(R^m); N(R^m), (M(R^m), \rho_{M(R^m)}), (N(R^m), \rho_{N(R^m)}), \dots$  所表示的意思也是清楚的。

又例如  $Z_n = (0, 1, 2, \dots)$ , 规定  $\rho_{Z_n}(i, j) = |i - j|$ , 则  $(Z_n; \rho_{Z_n})$  是可分完备距离空间, 于是记号  $\mathcal{A}(Z_n), \mathcal{B}(Z_n), \mathcal{F}_b(Z_n), \mathcal{F}(Z_n)$  等等, 表示的意思也是清楚的。

## §2. 存在定理 (一): 一维情形

**7. 连续两节我们将证明点过程理论的一个基本结果: 存在定理。**它相当于一般随机过程理论中的 Kolmogorov 定理。本节证明一个简单情形, 方法是初等的。

设  $(R, \rho_R)$  是带通常距离的实直线。假定  $P$  是  $N(R)$  上的分布, 即  $P \in \mathcal{P}_{N(R)}$ , 则对任意的  $m \geq 1, A_1, \dots, A_m \in \mathcal{A}(R)$ ,  $P$  的有限维分布族  $P_{A_1, \dots, A_m}$  就确定了, 而且有限

维分布族唯一确定了分布  $P$ 。

我们所要讨论的存在问题，可按下面的方式叙述：给定了概率分布族

$$\{P^{A_1}, \dots, A_m : m=1, 2, \dots, A_1, \dots, A_m \in \mathcal{A}(R)\}$$

其中每一  $P^{A_1}, \dots, A_m$  是  $Z_+^m$  上的分布，并且满足 Kolmogorov 相容性条件：

- 1) 对任意的  $m \geq 1$  及非负整数  $l_1, \dots, l_m$ ，等式

$$P^{A_1, \dots, A_m}(l_1, \dots, l_m) = P^{A_{i_1}, \dots, A_{i_m}}(l_{i_1}, \dots, l_{i_m})$$

对  $(1, 2, \dots, m)$  的任意排列  $(i_1, \dots, i_m)$  成立。

- 2) 
$$\sum_{l_m=0}^{\infty} P^{A_1, \dots, A_m}(l_1, \dots, l_{m-1}, l_m) = P^{A_1, \dots, A_{m-1}}(l_1, \dots, l_{m-1}).$$

根据 Kolmogorov 定理，存在  $Z_+^{\mathcal{A}(R)}$  (即定义于  $\mathcal{A}(R)$  而取值于  $Z_+$  的全体集函数) 上的概率分布  $P$ ，使得  $P$  的有限维分布就是给定的概率分布族，即

$$P^{A_1, \dots, A_m} = P^{A_1, \dots, A_m}, \quad m \geq 1, A_1, \dots, A_m \in \mathcal{A}(R).$$

由于对于每个  $\mu \in N(R)$ ， $\mu(A) \in Z_+$ ， $(A \in \mathcal{A}(R))$ ，所以  $N(R) \subset Z_+^{\mathcal{A}(R)}$ ，但并非每一个  $Z_+^{\mathcal{A}(R)}$  中的元都是  $\mathcal{A}(R)$  上的计数测度。于是问，需要对上面给出的满足 Kolmogorov 相容条件的概率分布族  $\{P^{A_1}, \dots, A_m\}$  附加什么条件，才能使得由它决定的  $P$  正好是一个点分布，即满足  $P(N(R)) = 1$ ？

本节的目的就在于讨论这个问题。下一节我们还将在一般的可分完备距离空间讨论相同的问题。

首先，假设  $P$  是点分布，即  $P \in \mathcal{P}_{N(R)}$ ，则它的有限维分布显然应满足条件：

- 3) 对任意的  $A, B \in \mathcal{A}(R)$ ， $A \cap B = \emptyset$ ，有

$$P_{A \cup B}((n_1, n_2, n_3) \in Z_+^3 : n_1 + n_2 = n_3) = 1,$$

- 4) 对于任意的  $(A_n) \subset \mathcal{A}(R)$ ， $A_n \downarrow \emptyset$ ，有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_{A_n}(0) = 1.$$

因此，为使给定的 Kolmogorov 相容族  $\{P^{A_1}, \dots, A_m\}$  是某个点分布的有限维分布，条件 3)，4) 是必要的。事实上这也是充分条件。

6. 存在定理 (一维情形)。设  $\Gamma$  是  $R$  中由全体具有有理端点的左开右闭区间所

产生的环，又设对任意  $m \geq 1$ ，任意的  $A_1, \dots, A_m \in \Gamma$ ，存在  $Z_+^m$  上的概率分布  $P^{A_1, \dots, A_m}$ 。为使如此给出的概率分布族

$$\{P^{A_1, \dots, A_m} : m \geq 1, A_1, \dots, A_m \in \Gamma\}$$

是某个点分布的有限维分布，即存在  $P \in \mathcal{P}_{N(R)}$  使

$$P^{A_1, \dots, A_m} = P^{A_1, \dots, A_m}, \quad m \geq 1, A_1, \dots, A_m \in \Gamma,$$

充分必要条件是：

1) 对任意的  $m \geq 1$  及任意的  $l_1, \dots, l_m \in \mathbb{Z}_+$ , 等式

$$P^{A_1, \dots, A_m}(l_1, \dots, l_m) = P^{A_{i_1}, \dots, A_{i_m}}(l_{i_1}, \dots, l_{i_m})$$

对  $(1, 2, \dots, m)$  的任意排列  $(i_1, \dots, i_m)$  都成立;

2) 对任意非负整数  $l_1, \dots, l_{m-1}$ , 有

$$\sum_{l_m \in \mathbb{Z}_+} P^{A_1, \dots, A_m}(l_1, \dots, l_{m-1}, l_m) = P^{A_1, \dots, A_{m-1}}(l_1, \dots, l_{m-1}),$$

3) 对任意的  $A, B \in \Gamma$ ,  $A \cap B = \emptyset$ , 有

$$P^{A \cup B, A \cup B}((n_1, n_2, n_3) \in \mathbb{Z}_+^3 : n_1 + n_2 = n_3) = 1;$$

4) 若  $(A_n) \subset \Gamma$ ,  $A_n \downarrow \emptyset$ , 则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P^{A_n}(0) = 1.$$

**证明** 必要性是明显的(见上面的讨论)。往证充分性。由条件1)和2), 应用Kolmogorov定理, 存在  $(\mathbb{Z}_+^m, (\mathcal{M}(\mathbb{Z}_+)^m)^r)$  上的概率分布  $P_n$ , 满足

$$P_n(x \in \mathbb{Z}_+^m : x(A_i) = l_i, 1 \leq i \leq m) = P^{A_1, \dots, A_m}(l_1, \dots, l_m), \text{ 其中 } m \text{ 是任意}$$

自然数,  $l_1, \dots, l_m$  是任意非负整数, 而  $A_1, \dots, A_m \in \Gamma$ 。这里  $\sigma$  代数  $(\mathcal{M}(\mathbb{Z}_+)^m)^r$  是按通常的方法由投影产生的, 即由如下形式的集合族

$$\{x \in \mathbb{Z}_+^m : x(A_i) = l_i, 1 \leq i \leq m\}, m \geq 1, l_i \in \mathbb{Z}_+, A_i \in \Gamma, (1 \leq i \leq m)$$

所产生的。

设  $N^r(R) \subset \mathbb{Z}_+^r$  满足以下条件:  $x \in N^r(R)$  当且仅当  $x \in \mathbb{Z}_+^r$  并且对  $\Gamma$  中任意不相交的  $A$  和  $B$  有

$$x(A \cup B) = x(A) + x(B).$$

由于  $\Gamma$  是可数的, 故由条件3)知

$$P_n(\mathbb{Z}_+^r \setminus N^r(R)) = P_n(x \in \mathbb{Z}_+^r : \text{存在不相交的 } A, B \in \Gamma, \text{ 使}$$

$$x(A \cup B) \neq x(A) + x(B)) \leq \sum_{\substack{A, B \in \Gamma \\ A \cap B = \emptyset}} P_n(x \in \mathbb{Z}_+^r : x(A \cap B) \neq x(A) + x(B))$$

$$= \sum_{\substack{A, B \in \Gamma \\ A \cap B = \emptyset}} P^{A \cup B, A \cup B}((n_1, n_2, n_3) \in \mathbb{Z}_+^3 : n_1 + n_2 \neq n_3) = 0,$$

这说明  $P_n(N^r(R)) = 1$ 。

容易明白,  $x \in N^r(R)$  表示  $x(\cdot)$  是环  $\Gamma$  上的有限可加计数测度。

设  $N_\sigma(R) \subset N^r(R)$  满足条件:  $x \in N_\sigma(R)$  当且仅当  $x \in N^r(R)$  并且对任意  $(A_n) \subset \Gamma$ ,  $A_n \downarrow \emptyset$  有  $x(A_n) \downarrow 0$ 。我们要证明  $P(N^r(R) \setminus N_\sigma(R)) = 0$ 。

假设  $x \in N^r(R)$ , 但  $x \notin N_\sigma(R)$ , 则存在  $(A_n) \subset \Gamma$ ,  $A_n \downarrow \emptyset$ , 并且  $x(A_n) \geq 1$  对一切  $n$  成立。这里的  $(A_n)$  可以取为具有有理端点的左开右闭区间  $(I_n)$ 。事实上, 由于  $A_i \in \Gamma$ ,  $A_i$  可

表为有限个互不相交的具有有理端点的左开右闭区间之并,  $A_i = \bigcup_{j=1}^{m_i} A_{ij}$ . 又由于对所有

的  $n \geq 1$  都有  $A_i \supset A_n$ ,  $x(A_n) \geq 1$ , 所以必存在  $i_0$ ,  $1 \leq i_0 \leq m_1$  使  $x(A_{i_0} \cap A_n) \geq 1$  对一切  $n$  成立. 取  $I_1 = A_{i_0}$ , 则  $I_1 \subset A_1$ , 并且  $x(I_1 \cap A_n) \geq 1$  对一切  $n$  成立. 类似地考虑序列  $\{I_2 \cap A_n\}$ , 将  $I_1 \cap A_1$  表为互不相交的具有有理端点的左开右闭区间之有限并, 可知存在具有有理端点的左开右闭区间  $I_2$ , 满足  $I_2 \subset I_1 \cap A_1$ , 并且  $x(I_2 \cap I_1 \cap A_n) \geq 1$  对一切  $n \geq 2$  成立. 一般地, 设对  $k \geq 2$  已选好  $k$  个具有有理端点的左开右闭区间  $I_1, I_2, \dots, I_k$ , 满足

$I_{i+1} \subset I_i \cap A_{i+1}$ , ( $i=1, 2, \dots, k-1$ ) 并且  $x(I_k \cap I_{k-1} \cap \dots \cap I_1 \cap A_n) \geq 1$  对一切  $n \geq k$  成立. 考虑序列  $\{I_k \cap \dots \cap I_1 \cap A_{k+m}\}$ ,  $m=1, 2, \dots$ , 并将  $I_k \cap \dots \cap I_1 \cap A_{k+1}$  表示为互不相交的具有有理端点的左开右闭区间之有限并. 类似地可知存在具有有理端点的左开右闭区间  $I_{k+1} \subset I_k \cap \dots \cap I_1 \cap A_{k+1}$ , 并且  $x(I_{k+1} \cap I_k \cap \dots \cap I_1 \cap A_n) \geq 1$  对一切  $n \geq k+1$  成立. 于是由归纳法原理, 可选出一串具有有理端点的左开右闭区间  $\{I_n\}$ , 满足:

$$I_n \not\subset \phi, \text{ 并且对所有 } n \text{ 有 } x(I_n) \geq 1;$$

现设  $I_n = (r_n, s_n)$ ,  $n=1, 2, \dots$ ,  $r_n, s_n$  都是有理数. 这时必存在  $r_0$ , 使当  $n \geq n_0$  时  $r_n = r_0$ . 否则将存在严格上升的子序列  $\{r_{n_k}\}$ , 使得  $\lim_{k \rightarrow \infty} r_{n_k} = r_0 \in I_n$  对一切  $n$  成立, 这与  $I_n \not\subset \phi$  矛盾.

所以我们不妨设  $I_n = (r_0, s'_n)$ ,  $r_0, s_n$  是有理数并且  $s_n \downarrow r_0$  而  $x((r_0, s_n)) \geq 1$ ,  $n=1, 2, \dots$ . 对有理数  $r$  及正整数  $m$ , 令

$$B_{r,m} = \{x | x \in N^r(R); x((r, r + \frac{1}{m})) \geq 1\}, \text{ 则}$$

$$P_0(B_{r,m}) = 1 - P_0\{x | x \in N^r(R), x((r, r + \frac{1}{m})) = 0\} = 1 - P((r, r + \frac{1}{m}) \cap (0)),$$

由条件 4), 当  $m \uparrow \infty$  时,  $P_0(B_{r,m}) \downarrow 0$ . 令  $B_r = \bigcap_m B_{r,m}$ , 则  $P_0(B_r) = 0$ .

另一方面, 前面的证明表明, 如果  $x \in N^r(R)$  但  $x \notin N_0(R)$ , 则  $x \in$  某个  $B_{r,n}$ . 因此

$$P_0(N^r(R)/N_0(R)) \leq \sum_r P_0(B_r) = 0.$$

这表明  $P_0(N_0(R)) = 1$ .

因每一  $x \in N_0(R)$  是环  $\Gamma$  上的计数测度, 并且在环  $\Gamma$  上有界, 又因为  $\sigma(\Gamma) = \mathcal{A}(R)$ , 故  $x$  可扩张为  $\mathcal{A}(R)$  上的计数测度  $\mu$ . 由于这扩张的唯一性, 可知对应  $x \sim \mu$  是  $N_0(R)$  到  $N(R)$  到  $N(R)$  上的一一对应, 又由  $\sigma$  代数  $N_0(R) \cap (\mathcal{A}(Z_0))^r$  及  $N(R)$  的构造可知这对应还是可测的, 因此如果以  $P$  记  $P_0$  由变换  $x \sim \mu$  在  $N(R)$  上的导出测度, 则  $P$  是  $N(R)$  上的概率分布, 并且对任意  $m \geq 1$ , 任意非负整数  $i_1, \dots, i_m$ , 以及任意的  $A_1, \dots, A_m \in \Gamma$ , 有

$$\begin{aligned} P\{\mu_1 \mu \in N(R), \mu(A_1) = i_1, \dots, \mu(A_m) = i_m\} \\ = P_0\{x_1 \in N_0(R), x(A_1) = i_1, \dots, x(A_m) = i_m\} \\ = P^{A_1, \dots, A_m}(i_1, \dots, i_m), \end{aligned}$$



于是  $P$  就是所求的点分布。根据推论 5, 这样的点分布  $P$  还是唯一的。定理证毕。

我们可以将上面定理的条件稍加强而得上面的定理, 其证明因为与上面定理的证明类似, 我们把它略去。

**9. 定理** 设对任意的  $A_1, \dots, A_m \in \mathcal{A}(R)$ , 存在  $Z_+^m$  上的概率分布  $P^{A_1}, \dots, P^{A_m}$ , 为使如此给出的概率分布族

$$\{P^{A_1}, \dots, P^{A_m} \mid m \geq 1, A_1, \dots, A_m \in \mathcal{A}(R)\}$$

是某个点分布的有限维分布, 即存在  $P \in \mathcal{P}_{N(R)}$  使

$$P_{A_1, \dots, A_m} = P^{A_1, \dots, A_m}, \quad m \geq 1, A_1, \dots, A_m \in \mathcal{A}(R),$$

充分必要条件是

- 1) 对任意的  $m \geq 1$  及任意的  $i_1, \dots, i_m \in Z_+$ , 等式

$$P^{A_1, \dots, A_m}(i_1, \dots, i_m) = P^{A_{i_1}, \dots, A_{i_m}}(i_1, \dots, i_m)$$

对于  $(1, 2, \dots, m)$  的任意排列  $(i_1, \dots, i_m)$  都成立;

- 2) 对任意非负整数  $i_1, \dots, i_{m-1}$  有

$$\sum_{i_m \in Z_+} P^{A_1, \dots, A_m}(i_1, \dots, i_{m-1}, i_m) = P^{A_1, \dots, A_{m-1}}(i_1, \dots, i_{m-1});$$

- 3) 对任意的  $A, B \in \mathcal{A}(R)$ ,  $A \cap B = \emptyset$ , 有

$$P^{A, B, A \cup B}((n_1, n_2, n_3) \in Z_+^3; n_1 + n_2 = n_3) = 1;$$

- 4) 若  $(A_n) \subset \mathcal{A}(R)$ ,  $A_n \downarrow \emptyset$ , 则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P^{A_n}(0) = 1.$$

### §3. 存在定理(二): 一般情形

**10.** 为了在一般的可分完备距离空间上证明点过程的存在定理, 我们先作如下的准备。

设  $(X_1, \rho_{X_1}), (X_2, \rho_{X_2})$  是两个可分完备距离空间,  $A \subset X_1, B \subset X_2$  是相应空间中的 Borel 子集。称  $A$  与  $B$  是同构的, 并记作  $A \sim B$ , 如果存在由  $A$  到  $B$  的映射  $\varphi$ , 使得 1)  $\varphi$  是满射的, 即对任意的  $y \in B, \varphi^{-1}(y)$  不空; 2)  $\varphi$  是一一的, 即对任意  $x_1, x_2 \in A$ , 由  $x_1 \neq x_2$  推出  $\varphi(x_1) \neq \varphi(x_2)$ ; 3)  $\varphi$  与  $\varphi^{-1}$  都是可测的。显然 “ $\sim$ ” 是等价关系。

下面的结果引自 Parthasarathy (1967) 第一章定理 2.8 及 2.12。

**命题** 设  $(X, \rho_X)$  是任意可分完备距离空间,  $A \subset X$  是 Borel 子集, 则: 或者  $A$  至多可数, 或者  $A \sim (0, 1)$ , 其中  $(0, 1)$  上的 Borel 集按通常的意义给出。

**11. 引理** 设  $(X, \rho_X)$  是可分完备距离空间, 则存在  $(R, \rho_R)$  中的 Borel 集  $R_0$ , 以及由  $X$  到  $R_0$  的映射  $\varphi$ , 使得

- 1) 在映射  $\varphi$  之下,  $X \sim R_0$ ;
- 2) 映射  $\varphi$  将  $X$  中  $\rho_X$  意义下的有界集映为  $R_0$  中  $\rho_R$  意义下的有界集。

**证明** 任取  $a \in X$ , 令  $A_1 = \{x: \rho_X(x, a) \leq 1\}$ ; 对于自然数  $n \geq 1$ , 令  $A_n = \{x: n-1 < \rho_X(x, a) \leq n\}$ . 这时每一  $A_n$  或者至多可数, 从而可在  $(n-1, n)$  中任找一基数与  $A_n$  相同的有限或可列无穷集与  $A_n$  一一对应, 这对应记为  $\varphi_n$ ; 或者  $A_n$  不可数, 此时根据上面引述的命题, 存在  $A_n$  到  $(n-1, n)$  的映射, 仍记为  $\varphi_n$ , 使  $A_n \sim (n-1, n)$ , 令  $\varphi$  是  $X$  到  $(0, \infty)$  内的映射, 它在  $A_n$  上的限制就是  $\varphi_n$ , 又令  $R_0 = \varphi(X)$ . 于是  $\varphi$  及  $R_0$  即为所求. 证毕.

**12. 存在定理(一般情形)** 设  $(X, \rho_X)$  是完备可分距离空间, 又设对任意自然数  $m \geq 1$  及任意的  $A_1, \dots, A_m \in \mathcal{A}$ , 存在  $Z_+^m$  上的概率分布  $P^{A_1, \dots, A_m}$ . 为使如此给出的概率分布族是某个点分布的有限维分布. 即存在  $P \in \mathcal{P}_N$ , 使

$$P_{A_1, \dots, A_m} = P^{A_1, \dots, A_m}, \quad m \geq 1, A_1, \dots, A_m \in \mathcal{A},$$

充分必要条件是:

- 1) 对任意  $m \geq 1$ , 任意的  $A_1, \dots, A_m \in \mathcal{A}$  及任意非负整数  $l_1, \dots, l_m$ , 等式

$$P^{A_1, \dots, A_m}(l_1, \dots, l_m) = P^{A_1, \dots, A_m}(l_1, \dots, l_m)$$

对于  $(1, 2, \dots, m)$  的任意排列  $(i_1, \dots, i_m)$  都成立;

- 2) 对任意非负整数  $l_1, \dots, l_{m-1}$ , 有

$$\sum_{l_m=0}^{\infty} P^{A_1, \dots, A_m}(l_1, \dots, l_m) = P^{A_1, \dots, A_{m-1}}(l_1, \dots, l_{m-1});$$

- 3) 当  $A, B \in \mathcal{A}, A \cap B = \emptyset$  时有

$$P^{A, B, A \cup B}((n_1, n_2, n_3) \in Z_+^3: n_1 + n_2 = n_3) = 1;$$

- 4) 若  $A_n \in \mathcal{A}, A_n \downarrow \emptyset$ , 则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P^{A_n}(0) = 1.$$

**证明** 设  $\varphi$  是前面引理中所取定的映射

$$\varphi: X \rightarrow R_0 \subset R,$$

使  $X \sim R_0$ . 对  $m \geq 1$  及  $B_1, \dots, B_m \in \mathcal{B}(R)$ , 定义

$$P_0^{B_1, \dots, B_m} = P^{\varphi^{-1}(B_1 \cap R_0), \dots, \varphi^{-1}(B_m \cap R_0)},$$

如此得到的概率分布族

$$\{P_0^{B_1, \dots, B_m}: m \geq 1, B_1, \dots, B_m \in \mathcal{B}(R)\}$$

满足定理 9 的条件 1)~4), 于是存在  $P_0 \in \mathcal{P}_N(R)$ , 使得

$$(P_0)_{B_1, \dots, B_m} = P_0^{B_1, \dots, B_m}, \quad B_1, \dots, B_m \in \mathcal{B}(R);$$

设  $N(R_0) = \{v: v \in N_X(R), v(R_0^c) = 0\}$ , 则易证  $P_0(N(R_0)) = 1$ , 定义  $N(R_0)$  到  $N$  的映射  $\tilde{\varphi}$  如下, 对  $v \in N(R_0)$ , 令

$$\tilde{\varphi}(v) = v\varphi \quad \text{即} \quad (\tilde{\varphi}(v))(A) = v(\varphi(A)), \quad A \in \mathcal{A}(X);$$

易知  $\tilde{\varphi}$  是  $N(R_0)$  到  $N$  的可测变换. 令

$$P = P_0 \varphi^{m+1},$$

则  $P(N) = P_0(v: v \in N(R_0), v \notin N) = 1$ , 于是  $P$  是  $(N, N)$  上的分布. 对于任意的  $m \geq 1$ , 任意的  $A_1, \dots, A_m \in \mathcal{A}$ , 以及任意的  $l_1, \dots, l_m \in \mathbb{Z}_+$ , 有

$$\begin{aligned} P_{A_1, \dots, A_m}(l_1, \dots, l_m) &= P(\mu: \mu(A_i) = l_i, \dots, \mu(A_m) = l_m) \\ &= P_0(v: v \in N(R_0), v \notin \varphi(A_i) = l_i, 1 \leq i \leq m) \\ &= P_0(v: v \in N(R_0), v(\varphi(A_i)) = l_i, 1 \leq i \leq m) = P_0^{\varphi(A_1) \Delta \dots \Delta \varphi(A_m)}(l_1, \dots, l_m) \\ &= P_0^{\varphi^{-1}(\varphi(A_1) \cap R_0) \Delta \dots \Delta \varphi^{-1}(\varphi(A_m) \cap R_0)}(l_1, \dots, l_m) \\ &= P^{A_1, \dots, A_m}(l_1, \dots, l_m), \end{aligned}$$

这表明所得的点分布  $P$  即为所求, 而且易知这样的点分布还是唯一的. 证毕.

为了便于应用, 有时我们需要另一种形式的存在定理.

**18. 存在定理** 设对  $\mathcal{A}$  中任意互不相交的  $A_1, \dots, A_m$  存在的  $\mathbb{Z}_+$  上的概率分布  $P^{A_1, \dots, A_m}$ , 为使如此给定的概率分布族

$$\{P^{A_1, \dots, A_m}: m \geq 1, A_1, \dots, A_m \in \mathcal{A} \text{ 且互不相交}\}$$

是某个点分布的有限维分布, 即存在  $P \in \mathcal{S}_N$  使

$$P^{A_1, \dots, A_m} = P_{A_1, \dots, A_m}, A_1, \dots, A_m \in \mathcal{A} \text{ 且互不相交},$$

充分必要条件是:

1) 对于任意的  $m \geq 1$ , 任意的非负整数  $l_1, \dots, l_m$ , 以及任意互不相交的  $A_1, \dots, A_m \in \mathcal{A}$ , 等式

$$P^{A_1, \dots, A_m}(l_1, \dots, l_m) = P^{A_{i_1}, \dots, A_{i_m}}(l_1, \dots, l_m)$$

对于  $(1, 2, \dots, m)$  的任意排列  $(i_1, \dots, i_m)$  都成立;

2) 对于非负整数  $l_1, \dots, l_{m-1}$ , 有

$$\sum_{i_m \in \mathbb{Z}_+} P^{A_1, \dots, A_m}(l_1, \dots, l_{m-1}, i_m) = P^{A_1, \dots, A_{m-1}}(l_1, \dots, l_{m-1});$$

3) 如果  $A_1, \dots, A_{k-1}, A_k, \dots, A_m \in \mathcal{A}$  且互不相交, 又设  $A = \bigcup_{i=k}^m A_i$ , 则

$$P^{A_1, \dots, A_{k-1}, A}(l_1, \dots, l_k) = \sum_{i_k \in \mathbb{Z}_+} P^{A_1, \dots, A_{k-1}, A}(l_1, \dots, l_{k-1}, i_k, \dots, l_m);$$

4) 对任意的  $(A_n) \subset \mathcal{A}$ ,  $A_n \downarrow \phi$ , 有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P^{A_n}(0) = 1.$$

**证明** 充分性 为了能够应用定理12, 我们需要对任意的  $A_1, \dots, A_m \in \mathcal{A}$  构造出满足定理12的概率分布族, 为此, 设  $A_1, \dots, A_m \in \mathcal{A}$  固定. 令

$$B_{i_1} = A_{i_1} \setminus A_{i_1} \cap \left( \bigcup_{i=1, i \neq i_1}^m A_i \right), \quad 1 \leq i_1 \leq m;$$

$$B_{i_1, i_2} = (A_{i_1} \cap A_{i_2}) \setminus \left\{ (A_{i_1} \cap A_{i_2}) \cap \left( \bigcup_{i=1, i \neq i_1, i_2}^m A_i \right) \right\}, \quad i_1 < i_2, \quad 1 \leq i_1, i_2 \leq m;$$

$$B_{i_1 i_2 i_3} = (A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap A_{i_3}) \setminus ((A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap A_{i_3}) \cap (\bigcup_{i_1, i_2, i_3} A_i)),$$

$$i_1 < i_2 < i_3, 1 \leq i_1, i_2, i_3 \leq m;$$

$$B_1, \dots, B_m = A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_m$$

又对任意的  $l_1, \dots, l_m \in \mathbb{Z}_+$ , 令

$$P_0^{A_1, \dots, A_m}(l_1, \dots, l_m) = \sum_{h_1, \dots, h_m, h_{12}, \dots, h_{m-1, m}, \dots, h_{12} \dots m} P^{A_1, \dots, A_m, B_{12}, \dots, B_{m-1, m}, \dots, B_{12} \dots m}(h_1, \dots, h_m, h_{12}, \dots, h_{m-1, m}, \dots, h_{12} \dots m),$$

其中求和对一切满足条件

$$l_{i_1} = h_{i_1} + \left( \sum_{i_1 < i_2} h_{i_1 i_2} + \sum_{i_1 < i_3} h_{i_1 i_3} \right) + \left( \sum_{i_1 < i_2 < i_3} h_{i_1 i_2 i_3} + \sum_{i_1 < i_2 < i_4} h_{i_1 i_2 i_4} \right) + \dots + h_{12} \dots m, \quad 1 \leq i_1 \leq m,$$

的  $h_1, \dots, h_m, h_{12}, \dots, h_{m-1, m}, \dots, h_{12} \dots m$  进行。

容易看出如此定义的  $P_0^{A_1, \dots, A_m}$  是  $\mathbb{Z}_+^m$  的概率分布。我们要证明这样给出的概率分布

$$\{P_0^{A_1, \dots, A_m}, m \geq 1, A_1, \dots, A_m \in \mathcal{F}\}$$

满足定理12的条件1)~4)。为了简单起见，仅取  $m=2$  的情况证明。这时

$$P_0^{A_1, A_2}(l_1, l_2) = \sum_{\substack{h_1 + h_{12} = l_1 \\ h_2 + h_{12} = l_2}} P^{A_1, A_2, B_{12}}(h_1, h_2, h_{12}),$$

其中  $B_1 = A_1 \setminus (A_1 \cap A_2)$ ,  $B_2 = A_2 \setminus (A_2 \cap A_1)$ ,  $B_{12} = A_1 \cap A_2$ 。

定理12中条件1)显然被满足，为了验证定理12中的条件2)，注意到

$$\begin{aligned} & \sum_{l_2 \in \mathbb{Z}_+} P_0^{A_1, A_2}(l_1, l_2) \\ &= \sum_{l_2 \in \mathbb{Z}_+} \sum_{\substack{h_1 + h_{12} = l_1 \\ h_2 + h_{12} = l_2}} P^{A_1, A_2, B_{12}}(h_1, h_2, h_{12}) \\ &= \sum_{l_2 \in \mathbb{Z}_+} \sum_{h_1 + h_{12} = l_1} P^{B_{12}, B_2, B_{12}}(h_1, l_2 - h_{12}, h_{12}), \end{aligned}$$

其中当  $l_2 - h_{12} < 0$  时令  $P^{B_{12}, B_2, B_{12}}(h_1, l_2 - h_{12}, h_{12}) = 0$ ，再注意到本定理的条件3)，并令  $l_2 - h_{12} = z$  则有

$$\begin{aligned} \sum_{l_2 \in \mathbb{Z}_+} P_0^{A_1, A_2}(l_1, l_2) &= \sum_{z \in \mathbb{Z}_+} \sum_{h_1 + h_{12} = l_1} P^{B_{12}, B_2, B_{12}}(h_1, z, h_{12}) \\ &= \sum_{z \in \mathbb{Z}_+} P^{B_{12}, B_2}(l_1, z) = P^{B_{12}, B_2}(l_1) = P_0^{A_1}(l_1), \end{aligned}$$

所以定理12中条件2)满足,

现在验证定理12中的条件3)。因为

$$P_0^{A_1, \dots, A_m, A_m-1 \cup A_m}((n_1, n_2, n_3) \in \mathbb{Z}_+^3 : n_1 + n_2 = n_3) \\ = \sum_{n_1 \in \mathbb{Z}_+} \sum_{n_1 + n_2 = n_3} P_0^{A_1, \dots, A_m, A_m-1 \cup A_m}(n_1, n_2, n_3) = \sum_{n_1 \in \mathbb{Z}_+} \sum_{n_1 + n_2 = n_3} P^{A_1, \dots, A_m}(n_1, n_2),$$

再由本定理的条件3)推出

$$P_0^{A_1, \dots, A_m, A_m-1 \cup A_m}((n_1, n_2, n_3) \in \mathbb{Z}_+^3 : n_1 + n_2 = n_3) = \sum_{n_1 \in \mathbb{Z}_+} P^{A_m-1 \cup A_m}(n_1) = 1,$$

由于分布族  $\{P_0^{A_1, \dots, A_m-1 \cup A_m} : m \geq 1, A_1, \dots, A_m \in \mathcal{A}\}$  满足定理12的条件1)~4), 故存在  $P \in \mathcal{P}_N$ , 使对于互不相交的  $A_1, \dots, A_m \in \mathcal{A}$  有

$$P_{A_1, \dots, A_m} = P_0^{A_1, \dots, A_m-1 \cup A_m} = P^{A_1, \dots, A_m},$$

充分性获证。

**必要性** 为证必要性, 我们只需由定理12的条件1)~4)推出本定理的条件3)成立即可。现在由归纳法来证明这一点。

设  $A_1, \dots, A_m \in \mathcal{A}$  且互不相交, 先证明

$P^{A_1, \dots, A_m, A_m-1 \cup A_m}(l_1, \dots, l_m, l_{m+1}) = 0$ , 当  $l_{m-1} + l_m \neq l_{m+1}$  时; 事实上, 当  $l_{m-1} + l_m = l_{m+1}$  时, 由定理12的3)得

$$\sum_{l_1 \in \mathbb{Z}_+} \dots \sum_{l_{m-2} \in \mathbb{Z}_+} P^{A_1, \dots, A_m, A_m-1 \cup A_m}(l_1, \dots, l_m, l_{m+1}) \\ = P^{A_m-1, A_m, A_m-1 \cup A_m}(l_{m-1}, l_m, l_{m+1}) = 0;$$

利用这一点, 当  $l_1, \dots, l_m$  固定时, 由定理12的条件2)得

$$P^{A_1, \dots, A_m, A_m-1 \cup A_m}(l_1, \dots, l_m, l_{m-1} + l_m) \\ = \sum_{l_{m+1} \in \mathbb{Z}_+} P^{A_1, \dots, A_m, A_m-1 \cup A_m}(l_1, \dots, l_m, l_{m+1}) = P^{A_1, \dots, A_m}(l_1, \dots, l_m),$$

利用这个等式, 当  $l_1, \dots, l_{m-1}, l_{m+1}$  固定时, 则有

$$P^{A_1, \dots, A_m, A_m-1 \cup A_m}(l_1, \dots, l_{m-1}, l_{m+1}) \\ = \sum_{l_m \in \mathbb{Z}_+} \sum_{l_m \in \mathbb{Z}_+} P^{A_1, \dots, A_m, A_m-1 \cup A_m}(l_1, \dots, l_m, l_{m+1}) \\ = \sum_{l_m \in \mathbb{Z}_+} P^{A_1, \dots, A_m}(l_1, \dots, l_m),$$

这就证明了当  $k = m-1$  时本定理的条件3)成立, 于是运用归纳法容易得出本定理的条件3)。必要性获证。定理证毕。

## §4. 简单点分布

14. 给定基本相空间  $(X, \rho_X)$ , 考虑  $X$  上的计数测度  $\mu \in N$ 。如果对所有的  $a \in X$  都有

$$\mu(a) \leq 1,$$

则称  $\mu$  是简单的。记

$$N_s = \{\mu: \mu \in N, \mu \text{ 是简单的}\}.$$

对任意的  $\mu \in N$ , 令

$$\mu^*(\cdot) = \sum_{a \in X: \mu(a) > 0} \mu(a) \cdot \delta_a(\cdot),$$

则  $\mu^* \in N_s$ , 称  $\mu^*$  为与  $\mu$  对应的简单计数测度。

下面我们要证明  $N_s \in N$ , 因此若  $P \in \mathcal{P}_N$ , 则  $P(N_s)$  有意义。如果  $P(N_s) = 1$ , 我们就称  $P$  是简单点分布。

15. 设  $A \in \mathcal{A}$ ,  $(\mathcal{D}) \subset \mathcal{A}$  是  $\mathcal{A}$  中至多可列个互不相交的集合组成的集族, 如果  $A = \bigcup_{D \in \mathcal{D}} D$ , 则称  $(\mathcal{D})$  是  $A$  的一个分割。记

$$d(\mathcal{D}) = \sup_{D \in \mathcal{D}} d(D),$$

这里  $d(D)$  是有界集  $D$  的直径。如果  $(\mathcal{D}_n)$  是集  $A$  的一列分割, 满足条件:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d(\mathcal{D}_n) = 0,$$

则称  $(\mathcal{D}_n)$  是  $A$  的无穷小分割序列。由于  $X$  的可分性, 每个  $A \in \mathcal{A}$  都存在无穷小分割序列。

16. 定理 设  $\mu \in N$ ,  $A \in \mathcal{A}$ , 对于  $A$  的任意无穷小分割序列  $(\mathcal{D}_n)$ , 有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{D \in \mathcal{D}_n} \min(\mu(D), 1) = \mu^*(A).$$

证明 设  $B$  是任意含于  $A$  的有界集。集合

$$\{a: a \in B, \mu(a) > 0\}$$

只能是有限集。如果它是空集, 则  $\mu^*(B) = 0$ ; 如果它是单点集, 则  $\mu^*(B) = 1$ ; 如果它是两点以上的集, 则必定存在两点之间的最小正距离, 无论在何种情况, 当  $n$  充分大时都有

$$\mu^*(B) \leq \sum_{D \in \mathcal{D}_n} \min(\mu(D), 1) \leq \mu^*(A),$$

于是

$$\mu^*(B) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{D \in \mathcal{D}_n} \min(\mu(D), 1) \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sum_{D \in \mathcal{D}_n} \min(\mu(D), 1) \leq \mu^*(A),$$

又因  $\mu^*$  是  $\mathcal{A}$  上的测度, 在上式左边令  $B \uparrow A$ , 则

$$\mu^*(A) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{D \in \mathcal{D}_n} \min(\mu(D), 1) \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sum_{D \in \mathcal{D}_n} \min(\mu(D), 1) \leq \mu^*(A),$$

这说明  $\mu^*(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{D \in \mathcal{D}_n} \min(\mu(D), 1)$ 。

17. 推论 由  $(N, N)$  到  $(N, N)$  的映射

$$\mu \mapsto \mu^*$$

是可测的, 又  $N_s \in N$ 。

**证明** 由 $N$ 的构造可知, 我们只须证明: 对每个 $A \in \mathcal{B}$ ,  $\mu^*(A)$ 是 $N$ 可测的函数. 这是明显的, 因为若将 $\mu^*(A)$ 按上一段的表达式表出, 则表达式的右端显然是 $N$ 可测的. 又因为由 $N_s$ 的定义,  $\mu \in N_s$ 等价于 $\mu = \mu^*$ , 于是由 $\mu^*(A)$ 的可测性得:

$$N_s = \{ \mu_1, \mu \in N_s, \mu = \mu^* \} = \bigcap_{A \in \Gamma} \{ \mu_1, \mu \in N_s, \mu(A) = \mu^*(A) \} \in N_s,$$

此处 $\Gamma \subset \mathcal{B}$ 是某个可数环, 满足 $L_\sigma(\Gamma) = \mathcal{B}$  (例如 $\Gamma$ 可取为 $X$ 中有界开集作成的可数基所产生的环).

**18. 引理** 设 $\Gamma \subset \mathcal{B}$ 是环,  $L_\sigma(\Gamma) = \mathcal{B}$ , 又设 $P \in \mathcal{P}_N$ . 则对任意的 $\varepsilon > 0$ 及任意的 $A \in \mathcal{B}$ , 存在 $A_\varepsilon \in \Gamma$ 使

$$P(\mu \in N_s, \mu(\Delta \Delta A_\varepsilon) > 0) < \varepsilon,$$

这里 $\Delta$ 表示对称差.

**证明** 以 $\Gamma_1$ 记 $\mathcal{B}$ 中使引理结论成立的集, 则 $\Gamma_1 \supset \Gamma$ . 设 $A_n \in \Gamma_1$ ,  $A_n \uparrow A = \bigcup_n A_n$ . 给定 $\varepsilon > 0$ , 若对每个 $n$ 已选得满足条件的 $A_{n,\varepsilon} \in \Gamma$ 使

$$P(\mu \in N_s, \mu(A_n \Delta A_{n,\varepsilon}) > 0) < \varepsilon, \quad (n = 1, 2, \dots),$$

则有

$$\begin{aligned} P(\mu \in N_s, \mu(\Delta \Delta A_{n,\varepsilon}) > 0) &\leq P(\mu \in N_s, \mu(A_n \Delta A_{n,\varepsilon}) > 0) \\ &+ P(\mu \in N_s, \mu(A_n \setminus A) > 0) < \varepsilon + P(\mu \in N_s, \mu(A_n \setminus A) > 0); \end{aligned}$$

但当 $n \rightarrow \infty$ 时 $P(\mu \in N_s, \mu(A_n \setminus A) > 0) \rightarrow 0$ , 所以当 $n$ 充分大时,  $P(\mu \in N_s, \mu(\Delta \Delta A_{n,\varepsilon}) > 0) < 2\varepsilon$ , 这说明 $A \in \Gamma_1$ . 类似可证明, 当 $A_n \in \Gamma_1$ ,  $A_n \downarrow A = \bigcap_n A_n \in \mathcal{B}$ 时, 有 $A \in \Gamma_1$ . 于是 $\Gamma_1$ 是局部单调类, 应用局部单调类定理知 $\Gamma_1 = \mathcal{B}$ .

应用这个引理, 我们证明如下的定理, 它的含意是: 一个简单点分布可以从它的有限维分布获得合理的解释.

**19. 定理** 设 $\Gamma \subset \mathcal{B}$ 是半环,  $L_\sigma(\Gamma) = \mathcal{B}$ ,  $P \in \mathcal{P}_N$ . 点分布 $P$ 是简单点分布的充分必要条件是: 对任意的 $\varepsilon > 0$ 及任意的 $A \in \Gamma$ , 存在有限个互不相交的 $A_1, \dots, A_m \in \Gamma$ , 使 $A = \bigcup_{i=1}^m A_i$ , 并且

$$P(\mu \in N_s, \mu(A_i) \leq 1, 1 \leq i \leq m) > 1 - \varepsilon.$$

**证明** 充分性 设 $A \in \Gamma$ , 对任意的 $\varepsilon > 0$ , 取满足条件的 $A_1, \dots, A_m \in \Gamma$ , 使 $A = \bigcup_{i=1}^m A_i$ , 则

$$P(\mu_1, \mu(A) \neq \mu^*(A)) \leq P\left\{ \bigcup_{i=1}^m (\mu_1, \mu(A_i) > 1) \right\} < \varepsilon,$$

由于 $\varepsilon$ 的任意性, 所以实际上

$$P(\mu_1, \mu(A) \neq \mu^*(A)) = 0, \quad \forall A \in \Gamma,$$

现设 $B \in \mathcal{B}$ , 由于 $B$ 可用 $\Gamma$ 中的可列个集来覆盖, 并且

$$P(\mu_1, \mu(B) \neq \mu^*(B)) \leq P\left\{ \bigcup_{i=1}^\infty (\mu_1, \mu(A_i) \neq \mu^*(A_i)) \right\}$$

其中  $B \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ ,  $A_i \in \Gamma$ ,  $(i=1, 2, \dots)$ 。所以

$$P(\mu_1 \mu(B) \neq \mu^*(B)) = 0, \text{ 凡 } B \in \mathcal{B}.$$

取  $(B_n) \subset \mathcal{B}$ ,  $B_n \uparrow X$ , 则

$$P(\mu_1 \mu \neq \mu^*) \leq P\left\{ \bigcup_{n=1}^{\infty} (\mu_1 \mu(B) \neq \mu^*(B)) \right\} = 0,$$

这说明  $P(N_s) = 1$ , 即  $P$  是简单点分布。

**必要性** 设  $P$  是简单点分布,  $A \in \Gamma$  固定。又设  $(\mathcal{D}_n)$  是  $A$  的无穷小分割序列, 满足

若  $D \in \mathcal{D}_{n+1}$ , 则存在  $D' \in \mathcal{D}_n$ , 使  $D \subset D'$ ;

容易知道这样的无穷小分割序列  $(\mathcal{D}_n)$  必存在。我们要证明:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left\{ \bigcup_{D \in \mathcal{D}_n} (\mu_1 \mu(D) > 1) \right\} = P\left\{ \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{D \in \mathcal{D}_n} (\mu_1 \mu(D) > 1) \right\} = 0.$$

事实上, 设  $\mu \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{D \in \mathcal{D}_n} (\mu_1 \mu(D) > 1)$ , 则一方面

$$\mu \in \bigcup_{D \in \mathcal{D}_n} (\mu_1 \mu(D) > 1), \quad n = 1, 2, \dots,$$

另一方面, 由于集  $\{a, a \in A, \mu(a) > 0\}$  是有限集 (无妨设它至少含有两个点), 其中任意两点的距离必有正的下界  $d$ , 所以当  $n$  充分大时,  $\mathcal{D}_n$  中的每一  $D$  或者与  $\{a, a \in A, \mu(a)$

$> 0\}$  不相交, 或者只能有唯一的公共点, 于是  $\mu \in \bigcup_{D \in \mathcal{D}_n} (\mu_1 \mu(D) > 1)$  表明  $\mu \in N_s^c$ , 所以

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{D \in \mathcal{D}_n} (\mu_1 \mu(D) > 1) \subset N_s^c,$$

由于  $P$  是简单的, 故  $P(N_s^c) = 0$ , 从而证得我们的断言。

现设  $\varepsilon > 0$ , 由已证的事实可知: 存在  $A$  的分割  $\mathcal{B} = (B_n)$ , 使

$$P\left\{ \bigcup_{n=1}^{\infty} \mu_1 \mu(B_n) > 1 \right\} < \varepsilon/4,$$

因为  $(A \setminus \bigcup_{n=1}^k B_n) \downarrow \phi, (k \rightarrow \infty)$ , 故  $P(\mu_1 \mu(A \setminus \bigcup_{n=1}^k B_n) > 0) \downarrow 0, (k \rightarrow \infty)$ 。于是可选取充分

大的  $k$ , 并令

$$B'_1 = B_1, \dots, B'_{k-1} = B_{k-1}, B'_k = \bigcup_{n=k}^{\infty} B_n, \text{ 使得}$$

$$A = \bigcup_{i=1}^k B'_i, P(\mu_1 \mu(B'_i) \leq 1, 1 \leq i \leq k) > 1 - \varepsilon/2,$$

根据引理18, 存在  $C_1, \dots, C_k \in \Gamma^*(\Gamma^*$  是  $\Gamma$  产生的环), 使得

$$P(\mu_1 \mu(B'_i \Delta C_i) > 0) < \varepsilon/4k, \quad i = 1, 2, \dots, k,$$



令  $C_{k+1} = A \setminus \bigcup_{i=1}^k C_i$ , 则  $C_1, \dots, C_{k+1} \in \Gamma^*$ , 而且是  $A$  的一个覆盖。我们有

$$\begin{aligned} P\left(\bigcup_{i=1}^{k+1} (\mu_i: \mu(C_i) > 1)\right) &\leq P\left(\bigcup_{i=1}^k (\mu_i: \mu(C_i) > 1)\right) + P(\mu_i: \mu(C_{k+1}) > 1) \\ &\leq P\left(\bigcup_{i=1}^k (\mu_i: \mu(B'_i) > 1)\right) + P(\mu_i: \mu(\bigcup_{i=1}^k (C_i \setminus B'_i)) > 0) + P(\mu_i: \mu(\bigcup_{i=1}^k (B'_i \setminus C_i)) > 0) \\ &> 0 \leq \frac{\varepsilon}{2} + 2 \sum_{i=1}^k P(\mu_i: \mu(C_i \setminus B'_i) > 0) \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{2k\varepsilon}{4k} = \varepsilon, \end{aligned}$$

这里我们用到  $C_{k+1} = A \setminus \bigcup_{i=1}^k C_i \subset \bigcup_{i=1}^k (B'_i \setminus C_i)$ 。

现在取  $D_i = C_i \setminus \bigcup_{j=1}^{i-1} C_j (i = 2, \dots, k+1)$ ,  $D_1 = C_1$ , 则更有

$$P(\mu_i: \mu(D_i) \leq 1, 1 \leq i \leq k+1) > 1 - \varepsilon_3$$

最后, 由于  $\Gamma^*$  由半环  $\Gamma$  生成, 故可以选取  $A_1, \dots, A_m \in \Gamma$ , 它们互不相交, 而且  $\bigcup_{j=1}^m A_j = A$ 。

$A \cap D_i (1 \leq i \leq k+1)$  都是某些  $A_j$  之并, 这就更加有

$$P(\mu_i: \mu(A_j) \leq 1, 1 \leq j \leq m) > 1 - \varepsilon, \text{ 定理证完。}$$

为了获得简单点分布进一步的性质, 引入如下的定义。

设  $\varphi(\cdot)$  是  $\mathcal{B}$  上定义的集函数, 令

$$\Delta_A \varphi(B) = \varphi(A \cup B) - \varphi(B), \quad A, B \in \mathcal{B},$$

$\Delta_A \varphi(\cdot)$  作为  $\mathcal{B}$  上定义的集函数, 又可定义

$$\Delta_{A_1} \Delta_{A_2} \varphi(B) = \Delta_{A_1} (\Delta_{A_2} \varphi(B)), \quad A_1, A_2, B \in \mathcal{B},$$

一般地, 对  $A_1, A_2, \dots, A_n \in \mathcal{B}$ , 定义

$$\Delta_{A_1} \Delta_{A_2} \dots \Delta_{A_{n-1}} \Delta_{A_n} \varphi(B) = \Delta_{A_1} \Delta_{A_2} \dots \Delta_{A_{n-1}} (\Delta_{A_n} \varphi(B)), \quad B \in \mathcal{B}.$$

如果对于任意的  $n \geq 1$ , 任意的  $A_1, \dots, A_n, B \in \mathcal{B}$ , 有

$$(-1)^n \Delta_{A_1} \Delta_{A_2} \dots \Delta_{A_n} \varphi(B) \geq 0,$$

则称集函数  $\varphi(\cdot)$  是完全单调的。

20. 引理 设  $P \in \mathcal{P}_n$ , 则集函数  $\varphi(B) = P(\mu: \mu(B) = 0)$  是完全单调的。

证明 对任意的  $A \in \mathcal{B}$ , 有

$$\begin{aligned} -\Delta_A \varphi(B) &= \varphi(B) - \varphi(A \cup B) = P(\mu: \mu(B) = 0, \mu(A \cup B) > 0) \\ &= P(\mu: \mu(B) = 0, \mu(A) > 0) \geq 0, \quad \forall A, B \in \mathcal{B}, \end{aligned}$$

假定对任意的  $A_1, \dots, A_n$ , 已证明

$$(-1)^n \Delta_{A_1} \dots \Delta_{A_n} \varphi(B) = P(\mu: \mu(B) = 0, \mu(A_i) > 0, 1 \leq i \leq n), \quad \forall A_i \in \mathcal{B},$$

则对  $A_1, \dots, A_n, A_{n+1} \in \mathcal{B}$ , 有

$$\begin{aligned}
& (-1)^{n+1} A_{A_1} \cdots A_{A_m} A_{A_{m+1}} \varphi(B) \\
&= (-1)^n A_{A_1} \cdots A_{A_m} \varphi(B) - (-1)^n A_{A_1} \cdots A_{A_m} \varphi(B \cup A_{m+1}) \\
&= P(\mu: \mu(B) = 0, \mu(A_i) > 0, 1 \leq i \leq n) - P(\mu: \mu(B \cup A_{m+1}) = 0, \mu(A_i) > 0, 1 \leq i \leq n) \\
&= P(\mu: \mu(B) = 0, \mu(A_i) > 0, 1 \leq i \leq n+1) \geq 0,
\end{aligned}$$

由归纳法得证引理。

21. 引理 设  $P \in \mathcal{S}_H$ ,  $A_0, A_1, \dots, A_m$  是  $\mathcal{S}$  中互不相交的有限集列, 则

$$\begin{aligned}
& P(\mu: \mu(A_0) = 0, \mu(A_i) > 0, 1 \leq i \leq m) \\
&= \sum_{0 \leq r \leq m} (-1)^r \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_r \leq m} P(\mu: \mu(A_0 \cup (\bigcup_{s=1}^r A_{i_s})) = 0).
\end{aligned}$$

证明 我们对任意的完全单调函数  $\varphi(\cdot)$  证明下式:

$$\begin{aligned}
& (-1)^m A_{A_1} \cdots A_{A_m} \varphi(A_0) \\
&= \sum_{0 \leq r \leq m} (-1)^r \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_r \leq m} \varphi(A_0 \cup (\bigcup_{s=1}^r A_{i_s})),
\end{aligned}$$

其中  $A_0, A_1, \dots, A_m \in \mathcal{S}$  且互不相交。假定上式对某个  $m \geq 1$  成立 (特别, 当  $m=1$ , 上式成立是显然的), 则

$$\begin{aligned}
& (-1)^{m+1} A_{A_1} \cdots A_{A_m} A_{A_{m+1}} \varphi(A_0) \\
&= (-1)^m A_{A_1} \cdots A_{A_m} \varphi(A_0) - (-1)^m A_{A_1} \cdots A_{A_m} \varphi(A_0 \cup A_{m+1}) \\
&= \sum_{0 \leq r \leq m} (-1)^r \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_r \leq m} \varphi(A_0 \cup (\bigcup_{s=1}^r A_{i_s})) \\
&\quad - \sum_{0 \leq r \leq m} (-1)^r \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_r \leq m} \varphi(A_0 \cup A_{m+1} \cup (\bigcup_{s=1}^r A_{i_s})) \\
&= \sum_{0 \leq r \leq m} (-1)^r \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_r \leq m} \varphi(A_0 \cup (\bigcup_{s=1}^r A_{i_s})) \\
&\quad + \sum_{0 \leq r \leq m} (-1)^{r+1} \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_r \leq m} \varphi(A_0 \cup A_{m+1} \cup (\bigcup_{s=1}^r A_{i_s})) \\
&= \sum_{0 \leq r \leq m+1} (-1)^r \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_r \leq m+1} \varphi(A_0 \cup (\bigcup_{s=1}^r A_{i_s})),
\end{aligned}$$

由归纳法即得欲证的等式, 特别令  $\varphi(A) = P(\mu: \mu(A) = 0)$ , 则引理获证。

22. 定义 设  $P \in \mathcal{S}_H$ , 令

$$\phi(A) \doteq P(\mu: \mu(A) = 0), \quad A \in \mathcal{S},$$

并称之为  $P$  的零概率函数。由前面两个引理可知, 一切如下形式的集合

$$\{\mu: \mu(A_0) = 0, \mu(A_i) > 0, 1 \leq i \leq m\}$$

的概率, 可用零概率函数表出。这里  $A_0, A_1, \dots, A_m \in \mathcal{S}$  并且互不相交。此外, 对于互不

相交的  $A_1, \dots, A_m \in \mathcal{A}$ , 以及任意的  $i, 1 \leq i \leq m$ , 有

$$\begin{aligned} & (-1)^i A_1 \cdots A_i \varphi\left(\bigcup_{i < r \leq m} A_r\right) \\ & = P(\mu: \mu(A_j) > 0, 1 \leq j \leq i; \mu(A_r) = 0, i < r \leq m), \end{aligned}$$

这只要在前面引理的证明中取  $A_0 = \bigcup_{r=i+1}^m A_r$  即可。

下面我们仍然回到简单点分布的讨论。

由定理16及其推论, 知  $\mu \sim \mu^*$  是由  $(N, \mathcal{N})$  到自身的可测映射, 这个映射将  $P \in \mathcal{S}_N$  映为  $(N, \mathcal{N})$  上的简单点分布, 记之为  $P^*$ , 于是  $P^*(\mu: \mu \notin N_2) = 0$ 。显然,  $P \in \mathcal{S}_N$  是简单的, 当且仅当  $P = P^*$ 。

对于任意两个  $P, Q \in \mathcal{S}_N$ ,  $P$  与  $Q$  可能不一样, 但只要它们有相同的零概率函数, 则  $P^* = Q^*$ , 这便是下面的定理。这个定理指出, 对于任意的  $P \in \mathcal{S}_N$ , 相应的  $P^*$  完全由  $P$  的零概率函数唯一确定, 特别当  $P$  是简单点分布时,  $P = P^*$ , 所以  $P$  也就由零概率函数唯一确定。

**23. 定理** 设  $\Gamma \subset \mathcal{A}$  是环,  $L_\sigma(\Gamma) = \mathcal{A}$ , 又设  $P, Q \in \mathcal{S}_N$ 。如果对任意的  $A \in \Gamma$ , 有  $P(\mu: \mu(A) = 0) = Q(\mu: \mu(A) = 0)$ , 则  $P^* = Q^*$ 。

**证明** 令  $R = \frac{1}{2}(P^* + Q^*)$ , 则  $R$  是简单点分布。设  $A_1, \dots, A_m \in \Gamma$ ,  $A_1, \dots, A_m$  互不相交。由引理19知, 对每个  $A_{i_0}$  ( $1 \leq i_0 \leq m$ ) 存在互不相交的有限序列  $B_{i_1}, \dots, B_{i_{n_i}} \in \Gamma$ ,

使  $A_{i_0} = \bigcup_{j=1}^{n_i} B_{i_0 j}$ , 并且使

$$R(\mu: \mu(B_{i_0 j}) \leq 1, 1 \leq j \leq n_i) > 1 - \varepsilon, \quad (1 \leq i_0 \leq m),$$

$$P^*(\mu: \mu(B_{i_0 j}) \leq 1, 1 \leq j \leq n_i) > 1 - \varepsilon, \quad (1 \leq i_0 \leq m)$$

$$Q^*(\mu: \mu(B_{i_0 j}) \leq 1, 1 \leq j \leq n_i) > 1 - \varepsilon, \quad (1 \leq i_0 \leq m)$$

同时成立, 其中  $\varepsilon > 0$  是预先给定的正数。

现在令

$$I = \{(i, j): 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n_i\}.$$

对任意的非负整数  $l_1, \dots, l_m$  ( $0 \leq l_i \leq n_i$ )。令  $J$  是  $I$  的满足如下条件的子集:  $J$  的  $i$  截面

刚好有  $l_i$  个元。如此得到的全体  $J$  记为  $\mathcal{S}$ 。于是我们有

$$\begin{aligned} & P^*(\mu: \mu(A_i) = l_i, 1 \leq i \leq m; \mu(B_{i_0 j}) \leq 1, (i, j) \in I) \\ & = \sum_{J \in \mathcal{S}} P^*(\mu: \mu(B_{i_0 j}) > 0, (i, j) \in J; \mu(B_{i_0 j}) = 0, (i, j) \in I \setminus J) \\ & = \sum_{J \in \mathcal{S}} P^*(\mu: \mu(B_{i_0 j}) > 0, (i, j) \in J; \mu(B_{i_0 j}) = 0, (i, j) \in I \setminus J, \\ & \quad \mu(B_{i_0 j}) > 1 \text{ 至少对某个 } (i, j) \in J), \end{aligned}$$

上式中, 若令  $\sum_{i=1}^m l_i \neq 0$ , 右边第二项和式中的集合均包含在

$$(\mu: \mu(B_{ij}) > 1, \text{至少一个 } (i, j) \in I)$$

之中, 注意到

$$P^*(\mu: \mu(A_i) = l_i, 1 \leq i \leq m)$$

$$- P^*(\mu: \mu(A_i) = l_i, 1 \leq i \leq m, \mu(B_{ij}) \leq 1, (i, j) \in I)$$

$$\leq P^*(\mu: \mu(B_{ij}) > 1, \text{至少一个 } (i, j) \in I) \leq me,$$

结合上面得

$$|P^*(\mu: \mu(A_i) = l_i, 1 \leq i \leq m)$$

$$- \sum_{j \in \mathcal{J}} P^*(\mu: \mu(B_{ij}) > 0, (i, j) \in \mathcal{J}, \mu(B_{ij}) = 0, (i, j) \in I \setminus \mathcal{J})|$$

$$\leq 2P^*(\mu: \mu(B_{ij}) > 1, \text{至少对一个 } (i, j) \in I) \leq 2me,$$

同样的不等式对  $Q^*$  也成立。又因为对每个  $j \in \mathcal{J}$ , 由引理 21,

$$P^*(\mu: \mu(B_{ij}) > 0, (i, j) \in \mathcal{J}, \mu(B_{ij}) = 0, (i, j) \in I \setminus \mathcal{J})$$

$$= Q^*(\mu: \mu(B_{ij}) > 0, (i, j) \in \mathcal{J}, \mu(B_{ij}) = 0, (i, j) \in I \setminus \mathcal{J}),$$

所以最后得

$$|P^*(\mu: \mu(A_i) = l_i, 1 \leq i \leq m) - Q^*(\mu: \mu(A_i) = l_i, 1 \leq i \leq m)| \leq 4me,$$

由于  $m$  是固定的,  $e$  是任意的, 再注意当  $l_1 = \dots = l_m = 0$  时

$$P_{A_1, \dots, A_m}^*(0, \dots, 0) = P(\mu: \mu(A_i) = 0, 1 \leq i \leq m)$$

$$= Q(\mu: \mu(A_i) = 0, 1 \leq i \leq m) = Q_{A_1, \dots, A_m}^*(0, \dots, 0),$$

我们得到  $P_{A_1, \dots, A_m}^* = Q_{A_1, \dots, A_m}^*$ , 此式对一切互不相交的  $A_1, \dots, A_m \in \Gamma$  成立, 所以由推论 5 知  $P^* = Q^*$ . 证毕

上述定理指出,  $P$  和  $Q$  只要有相同的零概率函数, 它们对应的简单点分布也就相同。我们可以将  $\mathcal{S}_N$  中的元素按照简单点分布来分类。对任意的  $P, Q \in \mathcal{S}_N$ , 若  $P^* = Q^*$ , 则称  $P$  与  $Q$  几乎等价, 记为  $P \sim Q(a, e)$ 。容易知道这是  $\mathcal{S}_N$  中的等价关系, 如果按这等价关系将  $\mathcal{S}_N$  中元素分为等价类, 则上面的定理表明, 每一等价类对应着唯一的零概率函数。由于零概率函数是满足条件  $\varphi(\phi) = P(\mu: \mu(\phi) = 0) = 1$  的完全单调集函数, 于是产生一个有趣的问题: 如果在  $\mathcal{S}$  上给定了满足条件  $\varphi(\phi) = 1$  的完全单调集函数  $\varphi(\cdot)$ , 是否一定存在  $P \in \mathcal{S}_N$ , 使  $\varphi(A) = P(\mu: \mu(A) = 0)$ ,  $A \in \mathcal{S}$ ? (这个问题参看 Kurtz 1974)。下面的例子表明, 从  $P \sim Q(a, e)$  不能推出  $P = Q$ 。

设  $a \in X$  是某一固定点, 令  $P, Q \in \mathcal{S}_N$  分别为:  $P(\delta_a) = 1, Q(2\delta_a) = 1$ , 则  $P^* = Q^*$ , 即  $P \sim Q(a, e)$ , 但是  $P \neq Q$ , 然而我们有下面的定理。

24. 定理 设  $\Gamma \subset \mathcal{S}$  是环,  $L_\sigma(\Gamma) = \mathcal{S}$ . 如果  $P, Q \in \mathcal{S}_N$  满足下列条件:

1)  $Q$  是简单的;

2)  $P(\mu: \mu(A) = 0) = Q(\mu: \mu(A) = 0)$ , 凡  $A \in \Gamma$ ;

3)  $P(\mu: \mu(A) > 1) \leq Q(\mu: \mu(A) > 1)$ , 凡  $A \in \Gamma$ ;

则  $P=Q$ 。

**证明** 对于任意的  $A \in \Gamma$  及任意的  $\varepsilon > 0$ , 由于  $Q$  是简单的, 所以由定理19, 存在  $\Gamma$  中互不相交的  $A_1, \dots, A_m$  使  $A = \bigcup_{i=1}^m A_i$ , 并且

$$Q(\mu: \mu(A_i) \leq 1, 1 \leq i \leq m) > 1 - \varepsilon,$$

又由条件2)及定理23, 有  $P^* = Q^* = Q$ , 所以也有

$$P^*(\mu: \mu(A_i) \leq 1, 1 \leq i \leq m) > 1 - \varepsilon,$$

于是

$$\begin{aligned} & P(\mu: \mu(A_i) > 1, \text{至少对一个 } i, 1 \leq i \leq m) \\ & \leq \varepsilon + P(\mu: \mu(A_i) > 1, \text{至少对一个 } i, 1 \leq i \leq m, \mu^*(A_i) \leq 1, \text{对一切 } i, \\ & \quad 1 \leq i \leq m) \\ & \leq \varepsilon + P\left(\bigcup_{i=1}^m (\mu: \mu(A_i) > 1, \mu^*(A_i) \leq 1)\right) \leq \varepsilon + \sum_{i=1}^m P(\mu: \mu(A_i) > 1, \mu^*(A_i) \leq 1) \\ & \leq \varepsilon + \sum_{i=1}^m [P(\mu: \mu(A_i) > 1) - P^*(\mu: \mu(A_i) > 1)] \\ & \leq \varepsilon + \sum_{i=1}^m [Q(\mu: \mu(A_i) > 1) - Q^*(\mu: \mu(A_i) > 1)] = \varepsilon, \end{aligned}$$

最后两步我们用到条件3)及等式  $P^* = Q^*$ . 于是

$$P(\mu: \mu(A_i) \leq 1, 1 \leq i \leq m) > 1 - \varepsilon,$$

再次用定理19, 知道  $P$  是简单的, 所以

$$P = P^* = Q^* = Q, \text{ 证毕.}$$

下面我们讨论与简单性有密切关系的有序性问题。

## §5. 有序点分布

25. 有序性是最早引入点过程理论的基本概念之一。我们先给出它的定义, 然后证明, 在很一般的情况下, 它与简单性是一回事。

设  $P \in \mathcal{P}_N$ , 称  $P$  是有序的, 如果对任意给定的  $\varepsilon > 0$ , 存在  $X$  的分割  $(\mathcal{D})$  使

$$\sum_{D \in \mathcal{D}} P(\mu: \mu(D) > 1) < \varepsilon.$$

从这个定义出发, 如果  $P$  是有序的,  $(\mathcal{D})$  是满足上述条件的  $X$  的分割, 那么对任意的  $A \in \mathcal{A}$ ,  $(\mathcal{D}') = (A \cap D)$  是  $A$  的分割, 而且

$$\sum_{D \in \mathcal{D}'} P(\mu: \mu(D) > 1) < \varepsilon,$$

反之, 如果对任意的  $A \in \mathcal{A}$ , 存在  $A$  的分割  $(\mathcal{D}_A)$  使

$$\sum_{D \in \mathcal{D}_A} P(\mu: \mu(D) > 1) < \varepsilon,$$

则可证明 $P$ 是有序的。

事实上, 选取 $\mathcal{D}$ 中一系列互不相交的 $A_n$ 覆盖 $X$ , 对 $\varepsilon > 0$ , 取 $A_n$ 的分割 $(\mathcal{D}_{A_n})$ 使

$$\sum_{D \in \mathcal{D}_{A_n}} P(\mu: \mu(D) > 1) < \frac{\varepsilon}{2^n}, \quad n = 1, 2, \dots$$

取 $(\mathcal{D}) = (\bigcup_n \mathcal{D}_{A_n})$ , 则 $(\mathcal{D})$ 是 $X$ 的一个分割, 满足

$$\sum_{D \in \mathcal{D}} P(\mu: \mu(D) > 1) < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^n} = \varepsilon.$$

**20. 引理** 若 $P \in \mathcal{P}_N$ 是有序的, 则 $P$ 是简单的。

**证明** 任给 $X$ 的分割 $(\mathcal{D})$ , 则

$$P(\mu: \mu \notin N_s) \leq \sum_{D \in \mathcal{D}} P(\mu: \mu(D) \neq \mu^0(D)) \leq \sum_{D \in \mathcal{D}} P(\mu: \mu(D) > 1)$$

于是当 $P$ 为有序时, 由定义, 可使得 $P(\mu: \mu \notin N_s)$ 任意小, 从而 $P(\mu: \mu \notin N_s) = 0$ , 故 $P$ 为简单分布。

然而, 反面的结论一般不成立。虽然如此, 对于十分广泛的一类点过程而言, 简单性与有序性是一回事, 为证此, 先引进一个定义。

**21. 定义** 设 $P \in \mathcal{P}_N$ , 对任意的 $A \in \mathcal{A}$ ,  $Y \in N$ , 令

$$\mathcal{G}_P(A \times Y) = \int_Y \mu(A) P(d\mu)$$

如此定义的 $\mathcal{G}_P$ 可以扩张为 $\mathcal{M} \times N$ 上的测度, 称 $\mathcal{G}_P$ 为 $P$ 的Campbell测度。

记 $I_P(A) = \mathcal{G}_P(A \times N)$ ,  $A \in \mathcal{A}$ 。称测度 $I_P(\cdot)$ 为 $P$ 的强度测度, 它是 $(X, \mathcal{M})$ 上的测度。如果它还是局部有限的, 即

$$I_P(A) = \int \mu(A) P(d\mu) < +\infty, \quad \forall A \in \mathcal{A},$$

则称点分布 $P$ 具有局部有限的强度测度。

下述引理是卡洛留克定理的一种形式。

**22. 引理** 设 $P \in \mathcal{P}_N$ ,  $I_P \in M$ ,  $A \in \mathcal{A}$ 。则对 $A$ 的任意无穷小分割序列 $(\mathcal{D}_n)$ 有

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{D \in \mathcal{D}_n} P(\mu: \mu \in N_s, \mu(D) = 1) &= \mathcal{G}_P(A \times N_s) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{D \in \mathcal{D}_n} P(\mu: \mu \in N_s, \mu(D) > 0). \end{aligned}$$

**证明** 当 $\mu \in N_s$ 时, 由定理16,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{D \in \mathcal{D}_n} \min(\mu(D), 1) = \mu^0(A) = \mu(A).$$

由控制收敛定理得

$$\mathcal{G}_P(A \times N_s) = \int_N \mu(A) P(d\mu) = \int_N \left( \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{D \in \mathcal{D}_n} \min(\mu(D), 1) \right) P(d\mu)$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{N_n} \left[ \sum_{D \in \mathcal{D}_n} \min(\mu(D), 1) \right] P(d\mu) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{D \in \mathcal{D}_n} \int_{N_n} \min(\mu(D), 1) P(d\mu) \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{D \in \mathcal{D}_n} P(\mu: \mu \in N_n, \mu(D) > 0),
\end{aligned}$$

这便证得欲证等式之右半部分。在证明过程中，为了应用控制收敛定理，我们需要  $\int_{N_n} \mu(A) P(d\mu) < \infty$ ，这是由定理条件  $I_P \in M$  保证的。

因为

$$\begin{aligned}
&\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{D \in \mathcal{D}_n} P(\mu: \mu \in N_n, \mu(D) = 1) \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{D \in \mathcal{D}_n} [P(\mu: \mu \in N_n, \mu(D) > 0) - P(\mu: \mu \in N_n, \mu(D) > 1)] \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \sum_{D \in \mathcal{D}_n} P(\mu: \mu \in N_n, \mu(D) > 0) - \sum_{D \in \mathcal{D}_n} P(\mu: \mu \in N_n, \mu(D) > 1) \right],
\end{aligned}$$

故只要证明  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{D \in \mathcal{D}_n} P(\mu: \mu \in N_n, \mu(D) > 1) = 0$ ，由前面已证的结果，便可得到欲证等式的左半部分。实际上，我们有

$$\begin{aligned}
&\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{D \in \mathcal{D}_n} P(\mu: \mu \in N_n, \mu(D) > 1) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{D \in \mathcal{D}_n} \sum_{h=1}^{\infty} P(\mu: \mu \in N_n, \mu(D) = h) \\
&< \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{D \in \mathcal{D}_n} \left[ \sum_{h=1}^{\infty} h P(\mu: \mu \in N_n, \mu(D) = h) - \sum_{h=1}^{\infty} P(\mu: \mu \in N_n, \mu(D) = h) \right] \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{D \in \mathcal{D}_n} (\mathcal{G}_P(D \times N_n) - P(\mu: \mu \in N_n, \mu(D) > 0)) \\
&= \mathcal{G}_P(A \times N_n) - \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{D \in \mathcal{D}_n} P(\mu: \mu \in N_n, \mu(D) > 0) = 0, \quad \text{引理证毕。}
\end{aligned}$$

下面的定理指出，当  $P \in \mathcal{P}_n$ ， $I_P \in M$  时， $P$  的简单性与有序性是一回事。

**29. 定理** 设  $P \in \mathcal{P}_n$ ， $I_P \in M$ ，则下述命题等价：

- 1)  $P$  是简单的；
- 2) 对任意的  $A \in \mathcal{A}$  以及  $A$  的无穷小分割序列  $(\mathcal{D}_n)$  有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{D \in \mathcal{D}_n} P(\mu: \mu(D) = 1) = I_P(A);$$

- 3) 对任意的  $A \in \mathcal{A}$  以及  $A$  的无穷小分割序列  $(\mathcal{D}_n)$  有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{D \in \mathcal{D}_n} P(\mu: \mu(D) > 0) = I_P(A);$$

- 4)  $P$  是有序的。

**证明** 1)  $\Rightarrow$  2)。由于  $P$  是简单的，所以  $P(N_n) = 1$ ，在前面的引理28中用  $N_n$  代替  $N$ ，即

得

$$I_P(A) = \sigma_P(A \times N) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{D \in \mathcal{D}_n} P(\mu: \mu(D) = 1).$$

2)  $\Rightarrow$  3) 直接由引理28推出, 因为总有  $\sum_{D \in \mathcal{D}_n} P(\mu: \mu(D) > 0) \leq I_P(A)$ .

3)  $\Rightarrow$  4) 由于

$$\begin{aligned} \sum_{D \in \mathcal{D}_n} P(\mu: \mu(D) > 1) &= \sum_{D \in \mathcal{D}_n} \sum_{k=2}^{\infty} P(\mu: \mu(D) = k) \\ &\leq \sum_{D \in \mathcal{D}_n} \left[ \sum_{k=1}^{\infty} k P(\mu: \mu(D) = k) - \sum_{k=1}^{\infty} P(\mu: \mu(D) = k) \right] \\ &= I_P(A) - \sum_{D \in \mathcal{D}_n} P(\mu: \mu(D) > 0), \end{aligned}$$

所以由条件3), 当  $n \rightarrow \infty$  时, 上式右端趋于0, 于是可找到充分大的  $n$  使上式左端小于事先给定的  $\varepsilon > 0$ , 这表明  $P$  是有序的。

4)  $\Rightarrow$  1) 见引理28. 得证。

## §6 无后效分布

30. 定义 设  $P \in \mathcal{P}_N$ . 如果对  $\mathcal{A}$  中任意不相交的  $A_1, \dots, A_m$ , 总有

$$P_{A_1, \dots, A_m} = P_{A_1} \times \dots \times P_{A_m},$$

则称  $P$  是无后效的。上式意味着, 对任意的非负整数  $l_1, \dots, l_m$ , 有

$$P_{A_1, \dots, A_m}(l_1, \dots, l_m) = \prod_{i=1}^m P_{A_i}(l_i).$$

$P$  的无后效性等价于  $(N, \mathcal{N}, P)$  上的随机变量  $\mu(A_1), \mu(A_2), \dots, \mu(A_m)$  的相互独立性 ( $A_1, \dots, A_m \in \mathcal{A}$  且互不相交), 有时也称  $P$  具有独立增量。

无后效性也是最早引入点过程理论的基本概念之一, 众所周知, 有序性、无后效性以及平稳性是最早研究随机事件流的基本假定。

31. 引理 对任意的  $P \in \mathcal{P}_N$ , 集合

$$X_P = \{a \in X, P(\mu: \mu(a) > 0) > 0\}$$

至多是可数集。

证明 只需证明: 对任意固定的  $B \in \mathcal{B}$  及任意固定的  $\varepsilon > 0$ , 关系式

$$P(\mu: \mu(a) \geq \varepsilon) \geq \varepsilon$$

至多对有限多个  $a \in B$  成立。

假设此关系式对  $B$  中无穷多个  $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$  成立, 则由 Eatsou 引理导出如下矛盾:

$$0 = P(\mu, \mu(B) = \infty) \geq P(\limsup_{n \rightarrow \infty} \{\mu: \mu(a_n) \geq \varepsilon\})$$



$$\geq \lim_{n \rightarrow \infty} \sup P(\mu(a_n) \geq \epsilon) \geq \epsilon.$$

32. 设  $A \in \mathcal{A}$ , 我们曾经以  $A\mu$  表示计数测度  $\mu$  在  $A$  上的限制, 即  $A\mu(\cdot) = \mu(A \cap \cdot)$ . 当  $\mu$  在  $N$  上变动时, 映射  $\mu \rightarrow A\mu$  是可测的. 对于任意的  $P \in \mathcal{P}_N$ , 我们以  $A P$  记  $P$  在此映射之下所诱导的测度, 显然  $A P \in \mathcal{P}_N$ .

由于上面的引理, 对于  $P \in \mathcal{P}_N$ , 集合

$$X_P = \{a \in X, P(\mu(a) > 0) = 0\} \in \mathcal{A},$$

记  $P_c = \chi_{X_P} P$ , 并称之为  $P$  的连续部分; 记  $P_d = \chi_{X_P^c} P$ , 并称之为  $P$  的离散部分. 称  $P$  是离散的,

如果  $P_c = \delta_0$ ; 称  $P$  是扩散的 (或连续的), 如果  $P_d = \delta_0$ , 这里 " $\delta_0$ " 表示  $(X, \mathcal{A})$  上的零测度, 而  $\delta_0$  表示  $(N, N)$  上的概率分布, 满足  $\delta_0(0) = 1$ . 显然  $\delta_0$  是  $\mathcal{P}_N$  中唯一的既扩散又离散的分布.

从无后效的定义立即推出, 当  $P \in \mathcal{P}_N$  是无后效分布时, 对于任意的  $P \in \mathcal{A}$ ,  $A P$  也是无后效的, 特别,  $P$  的离散部分  $P_d$  及连续部分  $P_c$  也是无后效的.

33. 引理 设  $\Gamma \subset \mathcal{A}$  是半环,  $L_\sigma(\Gamma) = \mathcal{A}$ .  $P \in \mathcal{P}_N$  是无后效的, 当且仅当对于任意的  $m \geq 2$ , 以及  $\Gamma$  中任意互不相交的  $A_1, \dots, A_m$ , 有

$$P_{A_1 \dots A_m} = P_{A_1} \times \dots \times P_{A_m}.$$

证明 以  $\Gamma^*$  记  $\Gamma$  产生的子环, 设  $B_1, \dots, B_m \in \Gamma^*$  且互不相交, 每个  $B_i$  都可表为

$$B_i = \bigcup_{j=1}^{n_i} A_{ij}, \quad A_{ij} \in \Gamma, \quad (1 \leq j \leq n_i) \text{ 且互不相交.}$$

由假定  $\{A_{ij}\}_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n_i}$  互不相交, 又当  $\{A_{ij}\}_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n_i}$  互不相交时, 有

$$\{\mu(A_{ij}), 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n_i\}$$

关于分布  $P$  是相互独立的, 所以

$$\mu(B_i) = \sum_{j=1}^{n_i} \mu(A_{ij}), \quad 1 \leq i \leq m.$$

关于分布  $P$  也是相互独立的. 重复上面的证法, 可知对于任意互不相交的  $C_1, \dots, C_m \in \mathcal{A}$ , 有

现设  $B_1, \dots, B_{m-1} \in \Gamma^*$  固定, 记满足下述条件的集合  $C \in \mathcal{A}$  的全体为  $\Gamma_1$ , 若  $C \in \Gamma_1$ , 则

$$\mu(B_1), \dots, \mu(B_{m-1}), \mu(C \setminus \bigcup_{j=1}^{m-1} B_j),$$

关于分布  $P$  相互独立. 上面已经证明了  $\Gamma_1 \supset \Gamma^*$ , 又容易验证  $\Gamma_1$  是局部单调类, 所以  $\Gamma_1 = \mathcal{A}$ . 这说明, 对于任意的  $B_1, \dots, B_{m-1} \in \Gamma^*$  以及任意的  $C \in \mathcal{A}$ , 只要它们互不相交, 则

$$\mu(B_1), \dots, \mu(B_{m-1}), \mu(C),$$

关于分布  $P$  相互独立. 重复上面的证法, 可知对于任意互不相交的  $C_1, \dots, C_m \in \mathcal{A}$ ,  $\{\mu(C_i), 1 \leq i \leq m\}$  关于分布  $P$  是相互独立的. 证毕.

对于固定的  $A \in \mathcal{A}$ ,  $A\mu$  表示测度  $\mu(A \cup \cdot)$ . 下面的定理中, 我们也用  $A\mu$  表示将  $\mu$  变为  $\mu(A \cap \cdot)$  的映射,  $N$  中由这个映射产生的  $\sigma$  代数记为  $A N$ .

34. 定理 设  $P \in \mathcal{P}_N$ , 则下列命题等价,

- 1)  $P$  是无后效的;
- 2) 对任意互不相交的  $A_1, \dots, A_m, A_1\mu, \dots, A_m\mu$  关于分布  $P$  是相互独立的;
- 3) 对任意的  $A \in \mathcal{A}$ ,  $A\mu$  与  $\mathcal{A}^c\mu$  关于  $P$  是相互独立的。

**证明** 1)  $\Rightarrow$  2) 我们必须证明,  $\sigma$  代数  $\mathcal{A}_1\mathbf{N}, \dots, \mathcal{A}_m\mathbf{N}$  关于  $P$  是相互独立的。

固定  $i, 1 \leq i \leq m$ , 令

$$\mathbf{N}^{(i)} = \bigcup_{C_1, \dots, C_k} \mathbf{N}_{C_1, \dots, C_k},$$

这里  $C_1, \dots, C_k$  取遍  $\mathcal{A}_i$  中互不相交的 Borel 子集, 则  $\mathbf{N}^{(i)}$  是代数, 并且  $\sigma(\mathbf{N}^{(i)}) = \mathcal{A}_i\mathbf{N}$ , ( $1 \leq i \leq m$ )。于是我们只要证明  $\mathbf{N}^{(1)}, \dots, \mathbf{N}^{(m)}$  的相互独立性, 但由于  $P$  的无后效性, 这一点是显然的。

2)  $\Rightarrow$  3), 显然。

3)  $\Rightarrow$  1) 设  $A_1, \dots, A_m \in \mathcal{A}$  互不相交, 由假定知:  $(A_1\mu)(A_1) = \mu(A_1)$  与  $\{\mu(A_2), \dots, \mu(A_m)\}$  关于分布  $P$  相互独立, 即

$$P_{A_1, \dots, A_m} = P_{A_1} \times P_{A_2, \dots, A_m},$$

类似考虑  $\{\mu(A_2), \dots, \mu(A_m)\}$  的分布  $P_{A_2, \dots, A_m}$ , 逐步可得

$$P_{A_1, \dots, A_m} = P_{A_1} \times \dots \times P_{A_m},$$

所以  $P$  是无后效分布。定理得证。

## §7. Laplace 泛函

**35. 定义** 以  $\mathcal{F}_{m+}$  记定义于  $(X, \rho_X)$  上的全体有界支撑的  $\mathcal{A}$  可测非负有界函数, 又设  $P \in \mathcal{P}_N$ , 在  $\mathcal{F}_{m+}$  上定义泛函

$$\Psi_P(f) = \int e^{-f\mu} P(d\mu), \quad f \in \mathcal{F}_{m+},$$

称为点分布  $P$  的 Laplace 泛函, 这里  $f\mu = \int f(a)\mu(da)$ 。

如果  $\xi = \xi(\omega, \cdot)$  是点过程, 其分布为  $P_\xi^{-1}$ , 则点过程  $\xi$  的 Laplace 泛函就定义为它的分布  $P_\xi^{-1}$  的 Laplace 泛函, 记作

$$\Psi_\xi(f) = \int e^{-f\mu} P_\xi^{-1}(d\mu) = \int_{\mathcal{D}} e^{-f\xi} P(d\omega),$$

这里  $f\xi = \int f(a)\xi(\omega, da)$ 。

类似定义随机测度的 Laplace 泛函。

**36. 定理** 为使  $\mathcal{F}_{m+}$  上定义的泛函  $\Psi(\cdot)$  是某个  $P \in \mathcal{P}_N$  的 Laplace 泛函, 充分必要条件是:

- 1) 对任意的正整数  $m$ , 任意的  $h_1, \dots, h_m, 0 < h_i \leq 1, (1 \leq i \leq m)$  以及任意互不相交的  $A_1, \dots, A_m \in \mathcal{A}$ ,  $\Psi\left(\sum_{i=1}^m \lambda_i \log \frac{1}{1-h_i}\right)$  作为  $(h_1, \dots, h_m)$  的函数是某个  $m$  维取非负整数值随机向量的概率母函数;

2) 对于  $\mathcal{F}_m$  中任意一列具有公共支撑的一致有界函数  $f_1, \dots, f_n, \dots$ , 如果  $f_n \rightarrow$  某个  $f$ , 则  $\Psi(f_n) \rightarrow \Psi(f)$ .

**证明 必要性** 设  $P \in \mathcal{P}_N$ ,  $A_1, \dots, A_m \in \mathcal{A}$  且互不相交, 令

$$f = \sum_{i=1}^m 1_{A_i} \log \frac{1}{h_i}, \quad 0 < h_i \leq 1, 1 \leq i \leq m.$$

则  $f \in \mathcal{F}_m$ , 并且

$$\begin{aligned} \Psi_P(f) &= \int e^{-f} f P(d\mu) = \int \left( \prod_{i=1}^m h_i^{\mu(A_i)} \right) P(d\mu) \\ &= \sum_{j_1, \dots, j_m \in \mathcal{Z}_+} P_{A_1, \dots, A_m}(j_1, \dots, j_m) h_1^{j_1} h_2^{j_2} \dots h_m^{j_m} \Psi, \end{aligned}$$

右端是  $\mathcal{Z}_+^m$  上的概率分布  $P_{A_1, \dots, A_m}$  的概率母函数, 1) 得证; 2) 可应用控制收敛定理推出。

**充分性** 设定理条件满足, 则对于任意互不相交的  $A_1, \dots, A_m \in \mathcal{A}$ , 存在  $\mathcal{Z}_+^m$  上的概率分布  $P^{A_1, \dots, A_m}$  使得

$$\Psi\left(\sum_{i=1}^m 1_{A_i} \log \frac{1}{h_i}\right) = \sum_{j_1, \dots, j_m \in \mathcal{Z}_+} P^{A_1, \dots, A_m}(j_1, \dots, j_m) h_1^{j_1} \dots h_m^{j_m}. \quad (1)$$

我们要证明如此给出的概率分布族

$$\{P^{A_1, \dots, A_m}: m \geq 1, A_1, \dots, A_m \in \mathcal{A} \text{ 互不相交}\} \quad (2)$$

满足存在定理13的条件1)~4)。

事实上, 定理13的条件1)显然被满足, 在(1)中令  $h_m = 1$ , 则一方面

$$\Psi\left(\sum_{i=1}^m 1_{A_i} \log \frac{1}{h_i}\right) = \sum_{j_1, \dots, j_{m-1} \in \mathcal{Z}_+} P^{A_1, \dots, A_m}(j_1, \dots, j_m) h_1^{j_1} \dots h_{m-1}^{j_{m-1}},$$

另一方面

$$\begin{aligned} \Psi\left(\sum_{i=1}^m 1_{A_i} \log \frac{1}{h_i}\right) &= \Psi\left(\sum_{i=1}^{m-1} 1_{A_i} \log \frac{1}{h_i}\right) \\ &= \sum_{j_1, \dots, j_{m-1} \in \mathcal{Z}_+} P^{A_1, \dots, A_{m-1}}(j_1, \dots, j_{m-1}) h_1^{j_1} \dots h_{m-1}^{j_{m-1}}. \end{aligned}$$

比较两边级数中  $h_1^{j_1} \dots h_{m-1}^{j_{m-1}}$  的系数得

$$P^{A_1, \dots, A_{m-1}}(j_1, \dots, j_{m-1}) = \sum_{j_m \in \mathcal{Z}_+} P^{A_1, \dots, A_m}(j_1, \dots, j_m),$$

这便是定理13的条件2)。

对于条件3), 我们要证

$$P^{A_1, \dots, A_{k-1}, A}(j_1, \dots, j_{k-1}, l) = \sum_{j_k + \dots + j_{m-1} = l} P^{A_1, \dots, A_m}(j_1, \dots, j_m), \quad (3)$$

其中  $A = \bigcup_{i=1}^m A_i$ ,  $(1 \leq i \leq m)$ , 在(1)中令  $k_2 = k_{k+1} = \dots = k_m = k$ , 则

$$\psi\left(\sum_{i=1}^m 1_{A_i} \log \frac{1}{h_i}\right) = \sum_{\substack{1, \dots, j_{k-1}, j_k, \dots, j_m \\ k, \dots, k, m}} P^{A_1, \dots, A_m}(j_1, \dots, j_m) h_1^{j_1} \dots h_{k-1}^{j_{k-1}} h^k \dots h^{j_m}.$$

另一方面

$$\begin{aligned} \psi\left(\sum_{i=1}^{k-1} 1_{A_i} \log \frac{1}{h_i} + 1_A \log \frac{1}{h}\right) \\ = \sum_{1, \dots, j_{k-1}, j_k, \dots, j_m} P^{A_1, \dots, A_{k-1}, A}(j_1, \dots, j_{k-1}, j) h_1^{j_1} \dots h_{k-1}^{j_{k-1}} h^j. \end{aligned}$$

比较两级数中  $h_1^{j_1} \dots h_{k-1}^{j_{k-1}} h^j$  项的系数即得欲证之(3).

为证明存在定理13中的条件4)满足, 取任意一串  $A_n \in \mathcal{A}$ ,  $A_n \downarrow \phi$ , 由本定理之条件2)可知  $\psi(1_{A_n} \log \frac{1}{h}) \rightarrow \psi(1_\phi \log \frac{1}{h}) = \psi(0)$ , 凡  $0 < h \leq 1$ , 这说明概率分布  $P^{A_n}$  弱收敛于  $P^\phi$ ,

但由于分布  $P^\phi$  的概率母函数  $\psi(1_\phi \log \frac{1}{h}) = \psi(0)$  是常数 (即与  $h$  无关), 故必有  $P^\phi(0) = 1$ , 于是  $P^{A_n}(0) \rightarrow P^\phi(0) = 1$ , 这便是欲证之条件4)。

由于分布族  $\{P^{A_1}, \dots, P^{A_m}, m \geq 1, A_1, \dots, A_m \in \mathcal{A} \text{ 且互不交}\}$  满足存在定理13的条件, 故存在  $P \in \mathcal{P}_N$ , 使

$$P^{A_1}, \dots, P^{A_m} = P^{A_1}, \dots, P^{A_m}, \quad \text{凡 } A_1, \dots, A_m \in \mathcal{A} \text{ 且互不相交.}$$

以  $\psi_P(\cdot)$  记  $P$  的 Laplace 泛函, 则可知

$$\psi_P\left(\sum_{i=1}^m t_i 1_{A_i}\right) = \psi\left(\sum_{i=1}^m t_i 1_{A_i}\right), \quad 0 \leq t_i < \infty, \quad 1 \leq i \leq m,$$

由于  $\mathcal{S}_m$  中任一  $f$  都可用具有公共支撑的一致有界简单函数来逼近, 故由上式推知对任意  $f \in \mathcal{S}_m$ , 都有

$$\psi_P(f) = \psi(f),$$

所以  $\psi(\cdot)$  就是点分布  $P$  的 Laplace 泛函. 证毕.

37. 引理 设  $G_1, \dots, G_m$  及  $O_1, \dots, O_m$  是  $(X; \rho_X)$  中任意两组有界开集, 满足  $O_i \subset G_i$ ,  $1 \leq i \leq m$ , 令

$$A = \bigcup_{i=1}^m (G_i \setminus O_i),$$

则  $\mathcal{A}$  中全体能表为如此形式的集合作成一个环  $\Gamma$ , 而且  $\mathcal{A} = \Gamma_0(\Gamma)$ .

证明 由于  $\Gamma$  包含一切有界开集, 故  $\mathcal{A} = L_n(\Gamma)$  是明显的. 又显然  $\Gamma$  对于有限并是封闭的, 下面证明它对于差的运算也封闭.

设  $A = \bigcup_{i=1}^m (G_i^{(1)} \setminus O_i^{(1)})$ ,  $B = \bigcup_{j=1}^n (G_j^{(2)} \setminus O_j^{(2)})$ , 由于

$$A \cap B = \bigcup_{j=1}^m (G_j^{(1)} \setminus O_j^{(1)}) \setminus (G_1^{(2)} \setminus O_1^{(2)}) \setminus \dots \setminus (G_m^{(n)} \setminus O_m^{(n)}).$$

故不妨设  $n=1$  而令

$$A = \bigcup_{j=1}^m (G_j \setminus O_j), \quad B = G_0 \setminus O_0, \quad G_j \supset O_j, \quad 0 \leq j \leq m.$$

这时

$$\begin{aligned} A \cap B &= \bigcup_{j=1}^m [(G_j \setminus O_j) \setminus (G_0 \setminus O_0)] \\ &= \bigcup_{j=1}^m \{(G_j \cap O_0) \setminus (O_j \cap O_0)\} \cup \{G_j \setminus (O_j \cup (G_j \cap O_0))\}. \end{aligned}$$

由于  $O_0 \cap O_j \subset G_j \cap O_0$ ,  $O_j \cup (G_j \cap O_0) \subset G_j$ , 所以  $A \cap B \in \Gamma$ . 证毕.

设  $\mathcal{F}_0$  是全体定义于  $(X, \rho_X)$  上的具有有界支撑的有界、非负连续函数, 则  $\mathcal{F}_0 \subset \mathcal{F}_{m+}$ ,  $\mathcal{F}_0 \subset \mathcal{F}$ . 下面的定理指出, 对于  $P \in \mathcal{P}_H$ , 它的 Laplace 泛函由  $\mathcal{F}_0$  中的函数唯一确定.

**36. 定理** 设  $P, Q \in \mathcal{P}_H$ , 它们的 Laplace 泛函分别为  $\Psi_P$  和  $\Psi_Q$ . 则  $P=Q$  的充分必要条件是:

$$\Psi_P(f) = \Psi_Q(f), \quad \forall f \in \mathcal{F}_0.$$

**证明** 必要性是显然的. 往证充分性. 由推论 5, 我们只要证明, 对任意不相交的  $A_1, \dots, A_k \in \mathcal{F}$ , 有  $P_{A_1}, \dots, P_{A_k} = Q_{A_1}, \dots, Q_{A_k}$ . 而这等价于证明, 对任意的非负实数  $c_1, \dots, c_k$  有

$$\Psi_P\left(\sum_{i=1}^k c_i 1_{A_i}\right) = \Psi_Q\left(\sum_{i=1}^k c_i 1_{A_i}\right). \quad (1)$$

为此, 设  $f_1, \dots, f_k \in \mathcal{F}_0$ . 固定, 令

$$\Gamma_l = \{A: A \in \mathcal{F}, \Psi_P(c_1 1_A + c_2 f_2 + \dots + c_k f_k) = \Psi_Q(c_1 1_A + c_2 f_2 + \dots + c_k f_k)\}$$

容易看出  $\Gamma_l$  是局部单调类 (这由定理 36-2 推出). 此外, 若设  $\Gamma$  是上面引理中所定义的环, 则可证  $\Gamma \subset \Gamma_l$ . 事实上, 设  $A \in \Gamma$  可表为:

$$A = \bigcup_{j=1}^m (G_j \setminus O_j), \quad G_j \supset O_j, \quad G_j, O_j \text{ 为有界开集}, \quad 1 \leq j \leq m.$$

按引理 1, 19 取  $\mathcal{F}_0$  中序列  $(f_n^{(j)})$  和  $(g_l^{(j)})$ ,  $1 \leq j \leq m$ . 使

$$f_n^{(j)} \rightarrow 1_{O_j}, \quad g_l^{(j)} \rightarrow 1_{G_j} \quad (n \rightarrow \infty),$$

令

$$h_{ln} = \max_{1 \leq j \leq m} (f_n^{(j)} - g_l^{(j)} \wedge g_l^{(j)}), \quad (l, n = 1, 2, \dots),$$

则  $h_{ln} \in \mathcal{F}_0$ , 并且对一切  $l$ , 有

$$\Psi_P(c_1 h_{ln} + c_2 f_2 + \dots + c_k f_k) = \Psi_Q(c_1 h_{ln} + c_2 f_2 + \dots + c_k f_k)$$

在上式中先令  $n \rightarrow \infty$ , 再令  $l \rightarrow \infty$ , 由定理 36-2 可得

$$\begin{aligned} & \Psi_P(c_1 \max_{1 \leq j \leq m} (1_{A_j} - 1_{B_j}) + c_2 f_2 + \dots + c_k f_k) \\ &= \Psi_O(c_1 \max_{1 \leq j \leq m} (1_{A_j} - 1_{B_j}) + c_2 f_2 + \dots + c_k f_k), \end{aligned}$$

而这就是

$$\Psi_P(c_1 1_A + c_2 f_2 + \dots + c_k f_k) = \Psi_O(c_1 1_A + c_2 f_2 + \dots + c_k f_k) \quad (2)$$

所以  $A \in \Gamma_1$ , 从而  $\Gamma_1 = L_O(\Gamma) = \mathcal{B}$ , 这说明(2)式对一切  $A \in \mathcal{B}$  都成立。

固定  $A \in \mathcal{B}$ , 令

$$\Gamma_2 = \{ A : A \in \mathcal{B},$$

$$\Psi_P(c_1 1_{A_1} + c_2 1_{A_2} + c_3 f_3 + \dots + c_k f_k) = \Psi_O(c_1 1_{A_1} + c_2 1_{A_2} + c_3 f_3 + \dots + c_k f_k) \},$$

则  $\Gamma_2$  是局部单调类, 类似上面的证法又可证明  $\Gamma_2 \supset \Gamma$ , 从而  $\Gamma_2 = \mathcal{B}$ , 于是证明了对任意  $A_1, A_2 \in \mathcal{B}$ , 有

$$\Psi_P(c_1 1_{A_1} + c_2 1_{A_2} + c_3 f_3 + \dots + c_k f_k) = \Psi_O(c_1 1_{A_1} + c_2 1_{A_2} + c_3 f_3 + \dots + c_k f_k),$$

按上面的证法进行  $k$  次, 可证(1)式成立。证毕。

下面我们再引入一种记号。设  $\xi$  和  $\eta$  是点过程, 如果  $P\xi^{-1} = P\eta^{-1}$ , 则记为  $\xi \stackrel{d}{=} \eta$ , 表示  $\xi$  与  $\eta$  依分布相等。类似的记号对于随机变量和随机向量也适用。例如当  $\xi$  与  $\eta$  是点过程

时, 对于每个  $f \in \mathcal{F}_+$ ,  $\xi f$  和  $\eta f$  都是随机变量, 于是  $\xi f \stackrel{d}{=} \eta f$  表示它们的分布相同。

**39. 定理** 设  $\xi$  和  $\eta$  是点过程, 则下述命题等价:

$$1) \quad \xi \stackrel{d}{=} \eta_1$$

$$2) \quad \xi f \stackrel{d}{=} \eta f, \quad \forall f \in \mathcal{F}_+,$$

$$3) \quad \Psi_\xi(f) = \Psi_\eta(f), \quad \forall f \in \mathcal{F}_+,$$

$$4) \quad (\xi(A_1), \dots, \xi(A_n)) \stackrel{d}{=} (\eta(A_1), \dots, \eta(A_n)), \quad \forall A_1, \dots, A_n \in \mathcal{B};$$

**证明** 1)与4)等价根据引理4及其推论5; 1)推出2), 2)推出3)显然的, 而3)推出1)则是前面的定理。

## §8 依分布收敛

**40.** 由定义1.13, 若  $(P_n) \subset \mathcal{P}_N$  (或  $\mathcal{P}_M$ ),  $P \in \mathcal{P}_N$  (或  $\mathcal{P}_M$ ), 则  $P_n \xrightarrow{w} P$  意味着

$$\lim_n \int g(\mu) P_n(d\mu) = \int g(\mu) P(d\mu), \quad g \in \mathcal{F}_b(N) \quad (\text{或 } g \in \mathcal{F}_b(M)),$$

这里  $\mathcal{F}_b(N)$  (或  $\mathcal{F}_b(M)$ ) 表示  $(N, \rho_N)$  (或  $(N, \rho_M)$ ) 上的全体有界连续函数。

现在设  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \dots$  是点过程 (或随机测度), 如果有

$$P\xi_n^{-1} \xrightarrow{w} P\xi^{-1}, \quad (n \rightarrow \infty).$$

则称 $\xi_n$ 依分布收敛于 $\xi$ , 记为 $\xi_n \xrightarrow{d} \xi$ ; 所以,  $\xi_n \xrightarrow{d} \xi$ 与 $P_{\xi_n}^{-1} \xrightarrow{w} P_{\xi}^{-1}$ 是一回事.

本书主要讨论点过程, 只是在完全类似的情形下我们也顺便讨论一下随机测度. 本节仅仅讨论点过程的依分布收敛. 首先讨论点分布族的相对紧性.

我们以 $\mathcal{E}$ 记 $(N, \mathbf{N})$ 上的全体有限测度. 由于 $(N, \rho_N)$ 是可分完备距离空间, 由定理 1.17, 可在 $\mathcal{E}$ 上引入一个距离 $\rho_{\mathcal{E}}$ , 使 $(\mathcal{E}, \rho_{\mathcal{E}})$ 是完备可分的.

设 $J$ 是任意非空指标集, 我们称 $\{E_\delta: E_\delta \in \mathcal{E}, \delta \in J\}$ 在距离空间 $(\mathcal{E}, \rho_{\mathcal{E}})$ 中相对紧, 如果它的闭包是紧集. 下面的定理刻画了 $(\mathcal{E}, \rho_{\mathcal{E}})$ 中的相对紧集.

**41. 定理** 集合 $\{E_\delta: E_\delta \in \mathcal{E}, \delta \in J\}$ 在 $(\mathcal{E}, \rho_{\mathcal{E}})$ 中是相对紧的充分必要条件是:

- 1)  $\sup_{\delta \in J} E_\delta(N) < \infty$ .
- 2) 对 $(X, \rho_X)$ 中的任意有界闭集 $A$ 及 $\varepsilon > 0$ , 存在非负整数 $n_{A, \varepsilon}$ 及紧集 $A_\varepsilon \subset A$ 使
 
$$\sup_{\delta \in J} E_\delta(\mu: \mu(A) \geq n_{A, \varepsilon}) < \varepsilon,$$

$$\sup_{\delta \in J} E_\delta(\mu: \mu(A \setminus A_\varepsilon) \geq 1) < \varepsilon.$$

**证明** 由定理 1.18,  $\{E_\delta: E_\delta \in \mathcal{E}, \delta \in J\}$ 在 $(\mathcal{E}, \rho_{\mathcal{E}})$ 中相对紧, 当且仅当条件 1) 成立以及存在 $(N, \rho_N)$ 中的紧集 $Y_\varepsilon$ 使

$$\sup_{\delta \in J} E_\delta(\mu \notin Y_\varepsilon) < \varepsilon.$$

先证必要性. 假定 $Y_\varepsilon$ 已如上选取, 根据定理 1.24 可知 $Y_\varepsilon$ 满足以下条件: 存在 $M > 0$ 使 $\sup_{\mu \in Y_\varepsilon} \mu(A) = M < \infty$ ; 又对任意 $\varepsilon' > 0$ , 存在紧集 $A_{\varepsilon'} \subset A$ , 使 $\sup_{\mu \in Y_\varepsilon} \mu(A \setminus A_{\varepsilon'}) < \varepsilon'$ .

所以若令 $\varepsilon' < 1$ ,  $n_{A, \varepsilon} = M$ , 则 $A_\varepsilon \subset A$ 是紧集且

$$\{\mu: \mu(A) \geq n_{A, \varepsilon}\} \subset Y_\varepsilon^c, \quad \sup_{\mu \in Y_\varepsilon^c} \mu(A \setminus A_\varepsilon) = 0$$

由此得

$$\sup_{\delta \in J} E_\delta(\mu: \mu(A) \geq n_{A, \varepsilon}) \leq \sup_{\delta \in J} E_\delta(\mu \in Y_\varepsilon^c) < \varepsilon,$$

$$\sup_{\delta \in J} E_\delta(\mu: \mu(A \setminus A_\varepsilon) \geq 1) \leq \sup_{\delta \in J} E_\delta(\mu \in Y_\varepsilon^c) < \varepsilon.$$

必要性得证.

**充分性** 假定 $\{E_\delta: E_\delta \in \mathcal{E}, \delta \in J\}$ 满足定理的条件. 设 $a_\varepsilon \in X$ 固定, 令 $A_m = \{a: \rho_X(a_\varepsilon, a) \leq m\}$ , 又设 $\varepsilon > 0$ 给定. 若对每个有界闭集 $A_m$ 及 $\varepsilon_m = \varepsilon/2^{m+1}$ 已取定了满足定理条件的 $n_{A_m, \varepsilon_m}$ 以及紧集 $A_{\varepsilon_m} \subset A_m$ 令

$$Y_\varepsilon = \{\mu: \mu(A_m) < n_{A_m, \varepsilon_m}, \mu(A_m \setminus A_{\varepsilon_m}) = 0, m = 1, 2, \dots\},$$

则 $Y_\varepsilon \subset \mathbf{N}$ , 由定理 1.24 它还是 $(N, \rho_N)$ 中的相对紧集, 而且

$$\begin{aligned} \sup_{\mathcal{G}_\varepsilon} E_{\mathcal{G}}(e \in Y_\varepsilon) &\leq \sup_{\mathcal{G}_\varepsilon} E_{\mathcal{G}}(\mu \in Y_\varepsilon) \\ &\leq \sup_{\mathcal{G}_\varepsilon} \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ E_{\mathcal{G}}(\mu: \mu(A_m) \geq \varepsilon_{m, \varepsilon}) + E_{\mathcal{G}}(\mu: \mu(A_m \setminus A_{\varepsilon_m}) > 0) \right\} \\ &\leq 2 \sum_{m=1}^{\infty} \varepsilon_m = \varepsilon. \end{aligned}$$

这说明  $\{E_{\mathcal{G}}: E_{\mathcal{G}} \in \mathcal{G}_\varepsilon, \mathcal{G}_\varepsilon \in \mathcal{G}_\varepsilon\}$  在  $(\mathcal{G}_\varepsilon, \rho_{\mathcal{G}_\varepsilon})$  中相对紧。

特别, 当  $E_{\mathcal{G}}$  都是  $(N, \mathcal{N})$  上的概率测度时, 上面定理中的条件 1) 总成立, 于是有如下推论。

**42. 推论** 设  $\{P_{\mathcal{G}}: \mathcal{G} \in \mathcal{G}\} \subset \mathcal{M}_N$ , 它是相对紧的, 当且仅当对任意有界闭集  $A \subset X$  及任意  $\varepsilon > 0$ , 存在非负数  $\varepsilon_{A, \varepsilon}$  及紧集  $A_\varepsilon \subset A$  使

$$\begin{aligned} \sup_{\mathcal{G} \in \mathcal{G}} P_{\mathcal{G}}(\mu: \mu(A) \geq \varepsilon_{A, \varepsilon}) &< \varepsilon, \\ \sup_{\mathcal{G} \in \mathcal{G}} P_{\mathcal{G}}(\mu: \mu(A \setminus A_\varepsilon) \geq 1) &< \varepsilon. \end{aligned}$$

我们还注意到这样一个明显的事实:  $\mathcal{M}_N$  在  $(\mathcal{G}_\varepsilon, \rho_{\mathcal{G}_\varepsilon})$  中是闭集。这是因为如果  $P_n \in \mathcal{M}_N$ ,  $E_n \in \mathcal{G}_\varepsilon$ , 则  $\rho_{\mathcal{G}_\varepsilon}(P_n, E) \rightarrow 0$  可推出  $E(N) = 1$ , 即  $E \in \mathcal{M}_N$ 。于是  $\mathcal{M}_N$  作为  $(\mathcal{G}_\varepsilon, \rho_{\mathcal{G}_\varepsilon})$  的子空间, 也是可分完备的。在这一节里我们将刻划  $\mathcal{M}_N$  中序列的收敛。

设  $Y \in \mathcal{N}$ , 若  $P(\partial Y) = 0$ , 我们前称之为  $P$  连续集, 全部有界  $P$  连续集记为  $\mathcal{M}_N$  或者为明白起见, 记作  $\mathcal{M}_N(N)$ , 表明它是  $N$  的子集类。如引理 1.21 所见,  $\mathcal{M}_N(N)$  是  $\mathcal{N}$  的子环。

**43. 定义** 对任意的  $A \in \mathcal{M}$ , 记

$$\partial_A N = \{\mu: \mu(\partial A) = 0, \mu \in N\}.$$

显然,  $\mu \in \partial_A N$  当且仅当  $A$  是  $\mu$  连续集, 即

$$\mu \in \partial_A N, \text{ 当且仅当 } A \in \mathcal{M}_\mu.$$

现设  $P \in \mathcal{M}_N$ , 如果对于  $A \in \mathcal{M}$  有

$$P(\partial_A N) = 1,$$

则称  $A$  是  $P$  的完全连续集,  $P$  的全体完全连续集记为  $\mathcal{M}_{CP}$ ,  $\mathcal{M}_{CP}$  中的全体有界集记作  $\mathcal{M}_{CP}$ 。

下面是有关完全连续集的两个引理。

**44. 引理** 设  $P \in \mathcal{M}_N$ , 则  $\mathcal{M}_{CP}$  是环, 而且对任意的  $A \in \mathcal{M}$  及任意的  $\varepsilon > 0$ , 在  $\mathcal{M}_{CP}$  中存在至多可数个直径小于  $\varepsilon$  的元覆盖  $A$ 。

**证明** 如引理 1.21 所证,  $\mathcal{M}_{CP}$  是环。现在我们证明它还包含  $(X, \rho_X)$  的一个开集基。为此只要证明, 对任意固定的  $a_0 \in X$  及正数  $r_0 > 0$ , 总存在正数  $r < r_0$  使

$$P(\mu: \mu(\partial S(a_0, r)) > 0) = 0 \quad \text{即 } S(a_0, r) \in \mathcal{M}_{CP},$$

这里  $S(a_0, r)$  是以  $a_0$  为中心, 以  $r$  为半径的开球。

事实上, 对任意  $\varepsilon > 0$ , 开区间  $(0, r_0)$  中最多只有有限个  $r$  使

$$P(\mu: \mu(\partial S(a_0, r)) > \varepsilon) > \varepsilon$$

成立。不然的话, 将存在  $r_1, r_2, \dots, r_n, \dots, 0 < r_n < r_0$  使



$$P(\mu_1 \mu(\partial S(a_0, r_n)) > \varepsilon) > \varepsilon, \quad n=1, 2, \dots,$$

因  $\partial S(a_0, r_n) \subset \{a_1 \rho(a_0, a) = r_n\} \subset S(a_0, r_0)$ , 故由Fatou引理导出如下矛盾:

$$0 < \varepsilon \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} P(\mu_1 \mu(\partial S(a_0, r_n)) > \varepsilon)$$

$$\leq P(\mu_1 \mu(S(a_0, r_0)) > \varepsilon) \leq P(\mu_1 \mu(S(a_0, r_0)) = \infty) = 0,$$

令  $\varepsilon \downarrow 0$ , 则可知在开区间  $(0, r_0)$  中至多只有可列个  $r$  使

$$P(\mu_1 \mu(\partial S(a_0, r)) > 0) > 0$$

成立, 所以总有  $r', 0 < r' < r_0$  使  $S(a_0, r') \in \mathcal{A}_{CF}$ . 又由于  $(X, \rho_X)$  的可分性, 知引理正确. 证毕.

由这引理立即推出  $\mathcal{L}_G(\mathcal{A}_{CF}) = \mathcal{A}$ , 这个事实今后将常用到.

**45. 引理** 设  $P \in \mathcal{P}_N$ , 则  $A \in \mathcal{A}_{CF}$  当且仅当对任意的  $n = 0, 1, 2, \dots$  有

$$Y_n = \{\mu_1 \mu(A) = n\} \in \mathcal{A}_P(N).$$

**证明** 设  $A \in \mathcal{A}_{CF}$ , 即  $P(\mu_1 \mu(\partial A) > 0) = 0$ , 我们要证对任意的  $n$  有  $\partial Y_n \subset \{\mu_1 \mu(\partial A) > 0\}$  从而推出  $P(\partial Y_n) = 0$ , 即  $Y_n \in \mathcal{A}_P(N)$ . 事实上, 如果  $\mu \in \partial Y_n$  且  $\mu(\partial A) = 0$ , 则取  $Y_n$  中一列  $(\mu_k)$ , 使  $\rho_N(\mu_k, \mu) \rightarrow 0$ , 由定理 I. 22 可得  $\mu(A^0) \leq n \leq \mu(\bar{A}) = \mu(A^0) + \mu(\partial A) = \mu(A^0)$ , 于是推出  $\mu(A) = n$ . 另一方面, 若在  $Y_n$  中取一串  $(\lambda_k)$ , 使  $\rho_N(\lambda_k, \mu) \rightarrow 0$ , 则  $(\lambda_k)$  中必存在子列  $(\lambda_{k_m})$ , 使得或者  $\lambda_{k_m}(A) < n$ , 或者  $\lambda_{k_m}(A) > n, (m=1, 2, \dots)$ , 这时有

$$\mu(A^0) \leq \liminf_{m \rightarrow \infty} \lambda_{k_m}(A^0) \leq \liminf_{m \rightarrow \infty} \lambda_{k_m}(A) < n,$$

或者

$$\mu(\bar{A}) \geq \limsup_{m \rightarrow \infty} \lambda_{k_m}(\bar{A}) \geq \limsup_{m \rightarrow \infty} \lambda_{k_m}(A) > n,$$

由于  $\mu(A) = n$ , 所以总有

$$\mu(\partial A) = \mu(\bar{A} \setminus \bar{\lambda}) \geq \mu(A) - \mu(\bar{\lambda}) > 0,$$

或者

$$\mu(\partial A) = \mu(\bar{A} \setminus \bar{\lambda}) \geq \mu(\bar{A}) - \mu(\bar{\lambda}) > 0,$$

这与  $\mu(\partial A) = 0$  的假定矛盾.

现设对任意的  $n$ , 有  $P(\partial Y_n) = 0$ , 即  $Y_n \in \mathcal{A}_P(N)$ , 要证明  $A \in \mathcal{A}_{CF}$ , 即  $P(\mu_1 \mu(\partial A) > 0) = 0$ , 我们只要证明

$$(\mu_1 \mu(\partial A) > 0) \subset \bigcup_{n=0}^{\infty} \partial Y_n.$$

为此, 任取  $\mu \in \{\mu_1 \mu(\partial A) > 0\}$ , 将它分解为如下三个测度之和  $\mu = \mu_1 + \mu_2 + \mu_3$ , 这里  $\mu_1, \mu_2, \mu_3$  分别是  $\mu$  在集合  $A, (\bar{A} \setminus A), (A^0)^c$  上的限制. 显然有

$$X = A \cup (\bar{A} \setminus A) \cup (A^0)^c, \quad \mu_i \in N, (i=1, 2, 3).$$

现设  $\mu(A) = n$ , 要证  $\mu \in \partial Y_n$ . 实际上, 如果这时  $\mu(\bar{A} \setminus A) = k > 0$ , 则存在  $a_1, \dots, a_k \in \bar{A} \setminus A$  使

$$\mu_2 = \sum_{i=1}^k \delta_{a_i}, \text{ 这里诸 } a_i \text{ 可能重复,}$$

取  $A$  中  $k$  个点列  $(a_i^{(m)}) \subset A$ , 使

$$\lim_{m \rightarrow \infty} a_i^{(m)} = a_i, \quad (i = 1, 2, \dots, k),$$

令

$$\mu^{(m)} = \mu_1 + \mu_2 + \sum_{i=1}^m \delta_{a_i^{(m)}}, \quad (m = 1, 2, \dots),$$

则  $\mu^{(m)} \in Y_n^c$ , 并且  $\mu^{(m)} \xrightarrow{t} \mu$ , 于是  $\mu \in Y_n^c$ , 但因为  $\mu(A) = n$ , 故又有  $\mu Y_n \subset Y_n$ , 所以  $\mu \in \partial Y_n$ .

如果  $\mu(\bar{A} \setminus A) = k > 0$ , 则在上面证明中将  $\mu$  分解为  $\mu = \mu_1 + \mu_2$ , 由于  $\mu(\partial A) > 0$ , 故存在  $a \in \partial A$ , 使得  $\mu(a) = \text{某个 } k_0 > 0$ , 取序列  $(a_m) \subset A^c$ ,  $a_m \rightarrow a$  ( $m \rightarrow \infty$ ), 令

$$\mu_m = \mu_1 + \mu_2 - \delta_a + \delta_{a_m}, \quad (m = 1, 2, 3, \dots)$$

则  $\mu_m \in Y_n^c$ , 并且  $\mu_m \xrightarrow{t} \mu$  ( $m \rightarrow \infty$ ), 于是  $\mu \in Y_n^c$ , 所以仍然有  $\mu \in \partial Y_n$ . 证毕.

设  $\xi$  是点过程, 以  $\mathcal{S}_\xi(N)$  记它的全体有界连续集, 即  $Y \in \mathcal{S}_\xi(N)$  当且仅当  $Y \in \mathbf{N}$ , 而且

$$P(\xi \in \partial Y) = P\xi^{-1}(\partial Y) = 0,$$

又以  $\mathcal{S}_c$  记  $\xi$  的全体有界完全连续集, 即  $A \in \mathcal{S}_c$  当且仅当  $A \in \mathcal{S}$ , 而且

$$P(\xi(\partial A) > 0) = P\xi^{-1}(\mu_\xi(\mu(\partial A) > 0)) = 0.$$

下述定理只是定理 I. 16 在点过程情形的改写.

**40. 定理** 设  $\xi, \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \dots$  是点过程, 则下列命题等价:

- 1)  $\xi_n \xrightarrow{d} \xi$ ;
- 2)  $\limsup_{n \rightarrow \infty} P(\xi_n \in U) \leq P(\xi \in U)$ , 凡  $(N, \rho_N)$  中闭集  $U$ ;
- 3)  $\liminf_{n \rightarrow \infty} P(\xi_n \in V) \geq P(\xi \in V)$ , 凡  $(N, \rho_N)$  中开集  $V$ ;
- 4)  $\lim_{n \rightarrow \infty} P(\xi_n \in Y) = P(\xi \in Y)$ , 凡  $Y \in \mathcal{S}_\xi(N)$ .

但这个定理只是个一般的结果, 对于点过程还应该有自己的特殊的收敛定理. 我们先从一些引理的叙述开始.

**47. 引理** 设  $(X_1, \rho_1), (X_2, \rho_2)$  是两个可分完备距离空间,  $h$  是  $(X_1, \mathcal{A}_1)$  到  $(X_2, \mathcal{A}_2)$  的可测映射, 以  $D_h$  记  $h$  的不连续点集. 如果  $(\mu_n) \subset M_B(X_1)$ ,  $\mu \in M_B(X_1)$ , 而且  $\mu(D_h) = 0$ ,

则由  $\mu_n \xrightarrow{w} \mu$  推出

$$\mu_n h^{-1} \xrightarrow{w} \mu h^{-1},$$

这里  $\mu h^{-1}$  是  $(X_2, \mathcal{A}_2)$  上的测度, 定义为

$$\mu h^{-1}(A) = \mu(h^{-1}(A)), \quad A \in \mathcal{A}_2.$$

**证明** 因为  $\mu_n \xrightarrow{w} \mu$ , 故有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mu_n h^{-1}(X_1) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu_n(X_1) - \mu(X_1) = \mu h^{-1}(X_1),$$

由定理 I.16, 我们只须证明, 当  $F$  是  $(X_1, \rho_1)$  中的闭集时, 有

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \mu_n h^{-1}(F) \leq \mu h^{-1}(F).$$

实际上, 设  $x \in h^{-1}(F)$ , 则存在  $x_n \in h^{-1}(F)$  使

$$\rho_1(x, x_n) \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty),$$

如果  $x$  是  $h$  的连续点则  $\rho_2(h(x), h(x_n)) \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$ , 由于  $F$  是  $X_1$  中的闭集, 所以有  $h(x) \in F$ , 即  $x \in h^{-1}(F)$ ; 如果  $x$  是  $h$  的不连续点, 则  $x \in D_h$ , 所以总有

$$h^{-1}(F) \subset D_h \cup h^{-1}(F),$$

注意到  $\mu(D_h) = 0$ , 由  $\mu_n \xrightarrow{w} \mu$  得

$$\begin{aligned} \limsup_{n \rightarrow \infty} \mu_n h^{-1}(F) &\leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \mu_n(\overline{h^{-1}(F)}) \leq \mu(h^{-1}(F)) \\ &\leq \mu(D_h) + \mu(h^{-1}(F)) = \mu h^{-1}(F). \end{aligned}$$

**40. 引理** 设  $h$  是  $(X, \rho_2)$  上定义的有有界支撑的有界可测函数, 又设  $(\mu_n) \subset M$ ,  $\mu \in M$ ,  $\mu_n \xrightarrow{I} \mu$ , 如果  $\mu(D_h) = 0$ , 则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mu_n h = \mu h,$$

这里  $\mu h = \int h(a) \mu(da)$ .

**证明** 由于  $h$  具有有界支撑, 所以集合

$$S_h = \{a: h(a) \neq 0\}$$

是有界闭集。我们可以根据 Urysohn 引理取有有界支撑的有界连续函数  $g$ , 使  $g$  在  $S_h$  上恒为 1. 定义测度

$$\mu'_n(\cdot) = \int_{(\cdot)} g(a) \mu_n(da), \quad \mu'(\cdot) = \int_{(\cdot)} g(a) \mu(da),$$

则  $\mu'_n, \mu'$  是  $X$  上的有限测度, 并且由  $\mu_n \xrightarrow{I} \mu$  推知  $\mu'_n \xrightarrow{w} \mu'$ . 又因为  $\mu(D_h) = 0$  可推出

$\mu'(D_h) = 0$ , 所以由前面的引理可知  $\mu'_n h^{-1} \xrightarrow{w} \mu' h^{-1}$ .

现设  $|h| \leq M$ , 令

$$f(t) = \begin{cases} -M, & \text{当 } t \leq -M, \\ t, & \text{当 } -M \leq t \leq M, \\ M, & \text{当 } t \geq M, \end{cases}$$

则  $f(t)$  是  $(\mathbb{R}, \rho_2)$  上的有界连续函数, 所以

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int f(t) \mu'_n h^{-1}(dt) = \int f(t) \mu' h^{-1}(dt),$$

用积分代换公式  $t = h(a)$  可得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int h(a) \mu'_n(da) = \int h(a) \mu'(da),$$

但由  $\mu'_n$  与  $\mu'$  之定义可知

$$\begin{aligned} \int h(a) \mu'_n(da) &= \int h(a) g(a) \mu_n(da) = \int h(a) \mu_n(da), \\ \int h(a) \mu'(da) &= \int h(a) g(a) \mu(da) = \int h(a) \mu(da), \end{aligned}$$

代入上式即得欲证之结果。

下设  $h_1, \dots, h_m$  是  $(X, \rho_1)$  上定义的有界实值的有界可测函数, 定义

$$\Pi_{h_1, \dots, h_m}(\mu) = (\mu h_1, \dots, \mu h_m), \quad \mu \in M,$$

则  $\Pi_{h_1, \dots, h_m}$  是  $(M, \rho_1)$  到  $(R^m, \rho_m)$  的可测映射, 我们以  $D_{\Pi_{h_1, \dots, h_m}}$  记这映射的不

连续点集。

下述引理是前面引理的推论。

**49. 引理** 在前述定义与记号之下有

$$D_{\Pi_{h_1, \dots, h_m}} \subset \bigcup_{i=1}^m \{\mu: \mu(D_{h_i}) > 0\}.$$

注意, 此处  $D_{h_i}$  是  $h_i$  的不连续点集, 属于  $\mathcal{B}$ , 而  $D_{\Pi_{h_1, \dots, h_m}}$  是  $\Pi_{h_1, \dots, h_m}$  的不连续点集, 属于  $M$ 。

**证明** 如果  $\mu \notin \{\mu: \mu(D_{h_i}) > 0\}, 1 \leq i \leq m$ , 即  $\mu(D_{h_i}) = 0, 1 \leq i \leq m$ , 由引理 48, 对任意  $(\mu_n) \subset M$ , 当  $\rho_n(\mu_n, \mu) \rightarrow 0$  时必有  $\mu_n h_i \rightarrow \mu h_i, 1 \leq i \leq m$ , 从而  $\mu \notin D_{\Pi_{h_1, \dots, h_m}}$ 。

**50. 引理** 设  $P \in \mathcal{P}_\mu, F$  是  $X$  中的有界闭集,  $G$  是  $X$  中的有界开集且  $G \supset F$ , 则存在  $A \in \mathcal{A}_{CP}$ , 使

$$F \subset A \subset G.$$

**证明** 根据 Urysohn 引理取  $f \in \mathcal{F}$  使

$$1_F \leq f \leq 1_G,$$

则  $\{f^{-1}(a)\}, a \in (0, 1)$  是  $X$  中一族互不相交的有界 Borel 集。类似引理 31 的证明可知集合

$$\{a: a \in (0, 1), P(\mu: \mu(f^{-1}(a)) > 0) > 0\}$$

至多是可数集。任取  $a_0 \in (0, 1)$  使  $P(\mu: \mu(f^{-1}(a_0)) > 0) = 0$ , 并取  $A = f^{-1}((a_0, \infty))$  则  $A$  是  $X$  中的开集, 且

$$\partial A = \bar{A} \setminus A \subset f^{-1}(\{a_0, \infty\}) \setminus f^{-1}((a_0, \infty)) = f^{-1}(a_0),$$

所以  $P(\mu: \mu(\partial A) > 0) = 0$  即  $A \in \mathcal{A}_{CP}$ , 而且显然有

$$F \subset A \subset G.$$

**51. 引理** 设  $\lambda, \mu$  是任意可测空间  $(\Omega, \mathcal{F})$  上的有限测度,  $g(\omega)$  是有界可测函数,  $|g(\omega)| \leq C$ , 则对任意  $A \in \mathcal{F}$  有

$$\begin{aligned} & \left| \int_A g(\omega) \lambda(d\omega) - \int_A g(\omega) \mu(d\omega) \right| \\ & \leq \lambda(A) \sup_{\omega, \omega' \in A} |g(\omega) - g(\omega')| + C |\lambda(A) - \mu(A)|. \end{aligned}$$

**证明** 当  $\lambda(A)$  和  $\mu(A)$  中有一为 0 时结论显然。设  $\lambda(A) > 0$ ,  $\mu(A) > 0$ , 则有

$$\begin{aligned} & \left| \int_A g(\omega) \lambda(d\omega) - \int_A g(\omega') \mu(d\omega') \right| \\ & \leq \frac{1}{\mu(A)} \left| \int_A \int_A (g(\omega) - g(\omega')) \lambda(d\omega) \mu(d\omega') \right| \\ & \quad + \left| \frac{1}{\mu(A)} - \frac{1}{\lambda(A)} \right| \left| \int_A \int_A |g(\omega')| \lambda(d\omega) \mu(d\omega') \right| \\ & \leq \lambda(A) \sup_{\omega, \omega' \in A} |g(\omega) - g(\omega')| + C |\lambda(A) - \mu(A)|. \end{aligned}$$

下面是本节的主要结果。

**52. 定理** 设  $P \in \mathcal{P}_\nu$ ,  $(P_n) \subset \mathcal{P}_N$ , 则下述命题等价:

- 1)  $P_n \xrightarrow{w} P$ ;
- 2)  $P_n \prod_{h_1, \dots, h_m}^{-1} \xrightarrow{w} P \prod_{h_1, \dots, h_m}^{-1}$ ,  $\forall h_1, \dots, h_m \in \mathcal{H}^+$ ;
- 3)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \Psi_{P_n}(f) = \Psi_P(f)$ ,  $\forall f \in \mathcal{H}^+$ ;
- 4)  $(P_n)_{h_1, \dots, h_m} \xrightarrow{w} P_{h_1, \dots, h_m}$ ,  $\forall A_1, \dots, A_m \in \mathcal{C}_1$ .

**证明** 我们按下图的步骤来证明本定理:



1)  $\Rightarrow$  2). 由于  $h_i$ ,  $1 \leq i \leq m$  都是连续的, 故由引理 49,  $D_{\Pi_{h_1, \dots, h_m}}$  是空集, 从而在引理 47 中取  $(X_1, \rho_1)$  为  $(N, \rho_\nu)$ ,  $(X_2, \rho_2)$  为  $(R^m, \rho_{h_m})$  则得 2).

2)  $\Rightarrow$  3). 在 2) 中取  $m=1$ ,  $h_1 = f \in \mathcal{H}^+$ , 则  $P_n \prod_f^{-1} \xrightarrow{w} P \prod_f^{-1}$ , 于是对  $(R, \rho_f)$  上的有界连续函数  $\varphi(t)$  有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int \varphi(t) P_n \prod_f^{-1}(dt) = \int \varphi(t) P \prod_f^{-1}(dt),$$

特别取

$$\varphi(t) = \begin{cases} e^{-t}, & \text{当 } t \geq 0, \\ 1, & \text{当 } t < 0, \end{cases}$$

由积分变换公式及 Laplace 泛函的定义即得 3).

3)  $\Rightarrow$  2). 利用下面熟知的关于 Laplace 变换的结果: 如果  $F_n$ ,  $F$  ( $n=1, 2, \dots$ )

是  $R_m^m$  上的概率分布, 则  $F_n \xrightarrow{w} F$  的充分必要条件为, 对任意  $t_1, \dots, t_m \geq 0$  有

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{R_m^m} e^{-(x_1 t_1 + \dots + x_m t_m)} F_n(dx_1, \dots, dx_m) \\ &= \int_{R_m^m} e^{-(x_1 t_1 + \dots + x_m t_m)} F(dx_1, \dots, dx_m) \end{aligned}$$

当3)成立时, 对给定的  $h_1, \dots, h_m \in \mathcal{F}_+$ , 令

$$h = t_1 h_1 + \dots + t_m h_m, \quad t_1, \dots, t_m \in R_+^m,$$

则  $h \in \mathcal{F}_+$ , 由3)知

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} \int e^{-\mu(h_1 + \dots + h_m)} P_n(d\mu) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int e^{-\mu h} P_n(d\mu) \\ &= \int e^{-\mu h} P(d\mu) = \int e^{-\mu(t_1 h_1 + \dots + t_m h_m)} P(d\mu), \end{aligned}$$

在上式两端进行积分代换即见

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{R_m^m} e^{-(t_1 x_1 + \dots + t_m x_m)} P_n \Pi_{h_1, \dots, h_m}^{-1}(dx_1, \dots, dx_m) \\ &= \int_{R_m^m} e^{-(t_1 x_1 + \dots + t_m x_m)} P \Pi_{h_1, \dots, h_m}^{-1}(dx_1, \dots, dx_m) \end{aligned}$$

所以  $P_n \Pi_{h_1, \dots, h_m}^{-1} \xrightarrow{w} P \Pi_{h_1, \dots, h_m}^{-1}$ .

2)  $\Rightarrow$  1). 设  $h_1, \dots, h_m \in \mathcal{F}_+$ , 如果  $G$  是  $(R^m, \rho_{R^m})$  中的开集且满足  $P \Pi_{h_1, \dots, h_m}^{-1}(\partial G) = 0$ , 则由于映射

$$\mu \mapsto (\mu h_1, \dots, \mu h_m)$$

是连续映射 (引理48), 所以

$$Y = \Pi_{h_1, \dots, h_m}^{-1}(G)$$

是  $(N, \rho_N)$  中的开集而且是  $P$ -连续集。

当  $m, h_1, \dots, h_m$ , 以及  $G$  变动时, 所得到的全体  $P$ -连续开集  $Y$  记为  $\Gamma$ 。

由于  $(N, \rho_N)$  中的拓扑是使全体映射

$$\mu \mapsto \mu f, \quad f \in \mathcal{F}_+,$$

都为连续的最粗拓扑, 所以它当然也是使映射

$$\mu \mapsto \mu f, \quad f \in \mathcal{F}_+,$$

都为连续的最粗拓扑, 从而  $\Gamma$  包含  $(N, \rho_N)$  的一个开集基, 无妨设  $\Gamma_1 \subset \Gamma$  是一可数基。

现证  $\Gamma$  对有限交运算封闭。设  $Y_1, Y_2 \in \Gamma$ , 于是存在  $h_1, \dots, h_m, g_1, \dots, g_k \in \mathcal{F}_+$  以及  $m$  维开集  $G_1$  和  $k$  维开集  $G_2$  使

$$Y_1 = \Pi_{h_1, \dots, h_m}^{-1}(G_1), \quad Y_2 = \Pi_{g_1, \dots, g_k}^{-1}(G_2),$$

令  $G = \{ (a_1, \dots, a_{m+k}) \in R^{m+k} : (a_1, \dots, a_m) \in G_1, (a_{m+1}, \dots, a_{m+k}) \in G_2 \}$ , 则

$$Y_1 \cap Y_2 = \prod_{h_1, \dots, h_m, g_1, \dots, g_k}^{-1} (G),$$

又因为

$$\partial(G) = \partial(G_1 \times G_2) = (\partial G_1 \times \bar{G}_2) \cup (\bar{G}_1 \times \partial G_2),$$

故由关系式

$$\prod_{h_1, \dots, h_m, g_1, \dots, g_k}^{-1} (\partial G) \subset \prod_{h_1, \dots, h_m}^{-1} (\partial G_1) \cup \prod_{g_1, \dots, g_k}^{-1} (\partial G_2)$$

知  $Y_1 \cap Y_2 \in \Gamma$ , 这就证明了  $\Gamma$  对有限交封闭.

今设  $Y_1, \dots, Y_m \in \Gamma$ , 则由关系式

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_n(Y) = P(Y), \quad \forall Y \in \Gamma, \quad (\text{由于 } 2),$$

$$P_n\left(\bigcup_{i=1}^m Y_i\right) = \sum_{1 \leq i \leq m} P_n(Y_i) - \sum_{1 \leq i < j \leq m} P_n(Y_i \cap Y_j) + \dots + (-1)^{m-1} P_n\left(\bigcap_{i=1}^m Y_i\right),$$

可知

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_n\left(\bigcup_{i=1}^m Y_i\right) = P\left(\bigcup_{i=1}^m Y_i\right).$$

现设  $Y$  是  $(N, \rho_N)$  中的任意开集, 要证

$$P(Y) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} P_n(Y),$$

从而推出  $P_n \xrightarrow{w} P$ . 由于  $\Gamma \subset \Gamma$  是可数基, 所以  $Y$  可表为  $Y = \bigcup_{i=1}^{\infty} Y_i$ ,  $Y_i \in \Gamma$ , 于是由已证事实得

$$\begin{aligned} P(Y) &= \lim_{i \rightarrow \infty} P\left(\bigcup_{j=1}^i Y_j\right) = \lim_{i \rightarrow \infty} \lim_{n \rightarrow \infty} P_n\left(\bigcup_{j=1}^i Y_j\right) \\ &\leq \lim_{i \rightarrow \infty} \liminf_{n \rightarrow \infty} P_n(Y) = \liminf_{n \rightarrow \infty} P_n(Y). \end{aligned}$$

1)  $\Rightarrow$  4). 设  $A_1, \dots, A_m \in \mathcal{A}_{CP}$ .  $\diamond$

$$h_i = 1_{A_i}, \quad 1 \leq i \leq m,$$

则  $h_i \in \mathcal{F}_{m+}$ ,  $1 \leq i \leq m$ , 并且

$$D_{\|h_1, \dots, h_m\|} = \bigcup_{i=1}^m D_{\|h_i\|} \subset \bigcup_{i=1}^m \{ \mu : \mu(A_i) > 0 \}.$$

但由于  $A_1, \dots, A_m \in \mathcal{A}_{CP}$ , 故

$$P(D_{\|h_1, \dots, h_m\|}) \leq \sum_{i=1}^m P(\mu : \mu(A_i) > 0) = 0,$$

从而由引理47知

$$P_n \Pi_{h_1, \dots, h_m}^{-1} \xrightarrow{w} P \Pi_{h_1, \dots, h_m}^{-1}.$$

而这就是

$$(P_n)_{A_1, \dots, A_m} \xrightarrow{w} P_{A_1, \dots, A_m}.$$

4)  $\Rightarrow$  2). 设  $h_1, \dots, h_m \in \mathcal{F}$ , 我们首先选取  $A \in \mathcal{A}_{CP}$  使  $\{a : a \in X, \max_{1 \leq i \leq m} h_i(a) >$

$0\}$  的闭包  $\subset A$ , 由引理50这样的  $A$  必存在, 因左边的集合是有界闭集.

设  $\delta > 0$ , 对一切  $(i, k)$ ,  $i = 1, 2, \dots, m$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , 再由引理50, 存在  $A_{ik} \in \mathcal{A}_{CP}$  使

$$h_i^{-1} \left( \left( \left[ -\frac{k\delta}{2}, \frac{(k+1)\delta}{2} \right] \right) \right) \subset A_{ik} \subset h_i^{-1} \left( \left( \left[ -\frac{k\delta}{2}, \frac{\delta}{4} \right], \frac{(k+1)\delta}{2} + \frac{\delta}{4} \right) \right).$$

由于  $h_i$  有界, 对固定的  $i$ ,  $(A_{ik})$  中只有有限个非空, 因此在序列

$$(A_{ik} : i = 1, 2, \dots, m, k = 1, 2, \dots)$$

中只有有限个非空, 将它们记为  $B_1, B_2, \dots, B_{s-1}$ , 令

$$A_1 = B_1, A_2 = B_2 \setminus B_1, \dots, A_{s-1} = B_{s-1} \setminus \left( \bigcup_{j=1}^{s-2} B_j \right), A_s = A \setminus \left( \bigcup_{j=1}^{s-1} A_j \right),$$

由于  $\mathcal{A}_{CP}$  是环, 故  $A_1, \dots, A_s \in \mathcal{A}_{CP}$ . 于是我们证明了, 对于所选取的  $A$  以及任意的  $\delta > 0$ , 总存在  $\mathcal{A}_{CP}$  中互不相交的  $A_1, \dots, A_s$  使

$$(1) \quad A = \bigcup_{j=1}^s A_j,$$

(2) 对于  $i = 1, 2, \dots, m$  及  $j = 1, 2, \dots, s$ ,

$$\sup_{a, a' \in A_j} |h_i(a) - h_i(a')| \leq \delta.$$

现设  $g(x) = g(x_1, \dots, x_m)$  是  $R^m$  上的有界连续函数, 为证明定理之2), 我们必须证明

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int g(x) P_n \Pi_{h_1, \dots, h_m}^{-1}(dx) = \int g(x) P \Pi_{h_1, \dots, h_m}^{-1}(dx).$$

令

$$\|g\| = \sup_{x \in R^m} |g(x)|, \|h_i\| = \sup_{a \in X} h_i(a), \quad (1 \leq i \leq m).$$

于是对任意自然数  $k$ , 有

$$\begin{aligned} & \limsup_{n \rightarrow \infty} \left| \int g(x) P_n \Pi_{h_1, \dots, h_m}^{-1}(dx) - \int g(x) P \Pi_{h_1, \dots, h_m}^{-1}(dx) \right| \\ &= \limsup_{n \rightarrow \infty} \left| \int g(\mu h_1, \dots, \mu h_m) P_n(d\mu) - \int g(\mu h_1, \dots, \mu h_m) P(d\mu) \right| \\ &\leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \left| \int_{\{\mu(A) \leq k\}} g(\mu h_1, \dots, \mu h_m) P_n(d\mu) - \int_{\{\mu(A) \leq k\}} g(\mu h_1, \dots, \mu h_m) P(d\mu) \right| \\ &\quad + \limsup_{n \rightarrow \infty} \|g\| (P_n(\mu(A) > k) + P(\mu(A) > k)) = I_1 + I_2. \end{aligned}$$

下面分别估计  $I_1$  与  $I_2$ . 对于  $I_1$ , 我们应用引理51得



$$\begin{aligned}
I_1 &= \limsup_{n \rightarrow \infty} \sum_{h_1, \dots, h_s \in h_f} \left| \int_{(\mu(A_j) = h_j, 1 \leq j \leq s)} g(\mu h_1, \dots, \mu h_m) P_n(d, u) \right. \\
&\quad \left. - \int_{(\mu(A_j) = h_j, 1 \leq j \leq s)} g(\mu h_1, \dots, \mu h_m) P(d\mu) \right| \\
&\leq \sup_{\substack{(\mu, \mu') \in \mathcal{M}(A_f) \times \mathcal{M}(A_f) \\ \mu(A) = \mu'(A) \leq h_s, 1 \leq j \leq s}} \left| g(\mu h_1, \dots, \mu h_m) - g(\mu' h_1, \dots, \mu' h_m) \right| \\
&\quad + \limsup_{n \rightarrow \infty} \|g\| \cdot \sum_{h_1, \dots, h_s \in h} \left| (P_n)_{A_1, \dots, A_s}(h_1, \dots, h_s) \right. \\
&\quad \left. - P_{A_1, \dots, A_s}(h_1, \dots, h_s) \right|,
\end{aligned}$$

但当  $\mu(A_j) = \mu'(A_j)$ ,  $1 \leq j \leq s$  时总有 (由引理 51)

$$\begin{aligned}
|\mu h_i - \mu' h_i| &= \left| \int h_i(a) \mu(da) - \int h_i(a) \mu'(da) \right| \\
&\leq \sum_{j=1}^s \left| \int_{A_j} h_i(a) \mu(da) - \int_{A_j} h_i(a) \mu'(da) \right| \leq \sum_{j=1}^s \delta_j \mu(A_j) = \delta \mu(A),
\end{aligned}$$

于是我们得

$$\begin{aligned}
I_1 &\leq \sup_{\substack{|x_i - x'_i| \leq h\delta \\ 0 \leq x_i, x'_i \leq h\|h_i\| \\ 1 \leq i \leq m}} \left| g(x_1, \dots, x_m) - g(x'_1, \dots, x'_m) \right| \\
&\quad + \limsup_{n \rightarrow \infty} \|g\| \cdot \sum_{h_1, \dots, h_s \in h} \left| (P_n)_{A_1, \dots, A_s}(h_1, \dots, h_s) - P_{A_1, \dots, A_s}(h_1, \dots, h_s) \right|,
\end{aligned}$$

上式右边第一项, 由于  $g$  在  $R^m$  的有界闭区域内一致连续, 故当  $\delta \rightarrow 0$  时它趋于 0, 而第二项, 由定理条件 4), 当  $n$  趋于  $\infty$  时

$$(P_n)_{A_1, \dots, A_s}(h_1, \dots, h_s) \rightarrow P_{A_1, \dots, A_s}(h_1, \dots, h_s),$$

所以第二项为 0, 于是  $I_1 = 0$ .

现在估计  $I_2$ . 由定理条件 4),  $(P_n)_A$  及  $P_A$  作为  $Z_+$  上的概率测度满足  $(P_n)_A \xrightarrow{w} P_A$ , 所以由定理 I. 18, 存在自然数  $k_0$  使

$$\begin{aligned}
P(\mu: \mu(A) > k_0) &< \frac{\varepsilon}{2(1 + \|g\|)}, \\
\sup_n P_n(\mu: \mu(A) > k_0) &< \frac{\varepsilon}{2(1 + \|g\|)}
\end{aligned}$$

这里  $\varepsilon > 0$  是预先给定的正数. 于是当  $k$  充分大时,

$$I_2 = \limsup_{n \rightarrow \infty} \|g\| (P_n(\mu: \mu(A) > k) + P(\mu: \mu(A) > k)) < \varepsilon.$$

所以最后有

$$0 \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \left| \int g(x) P_n \Pi_{h_1, \dots, h_m}^{-1}(dx) - \int g(x) P \Pi_{h_1, \dots, h_m}^{-1}(dx) \right| \leq I_1 + I_2 < \varepsilon,$$

于是

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int g(x) P_n \Pi_{h_1, \dots, h_m}^{-1}(dx) = \int g(x) P \Pi_{h_1, \dots, h_m}^{-1}(dx),$$

定理至此全部证毕。

上述定理可作如下改写。

**53. 定理** 设  $\xi, \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n \dots$  是点过程, 则下列命题等价:

1)  $\xi_n \xrightarrow{d} \xi$ ;

2)  $(\xi_n h_1, \dots, \xi_n h_m) \xrightarrow{d} (\xi h_1, \dots, \xi h_m)$ ,  $\forall h_1, \dots, h_m \in \mathcal{F}_+$ ;

3)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{W} \xi_n(h) = \mathcal{W} \xi(h)$ ,  $\forall h \in \mathcal{F}_+$ ;

4)  $(\xi_n(A_1), \dots, \xi_n(A_m)) \xrightarrow{d} (\xi(A_1), \dots, \xi(A_m))$ ,  $\forall A_1, \dots, A_m \in \mathcal{F}_0$ .

## §9. 卷积

**54. 定义** 易知, 映射

$$\varphi: (\mu, \lambda) \mapsto \mu + \lambda, \quad \mu, \lambda \in N,$$

是  $(N, N) \times (N, N)$  到  $(N, N)$  的可测映射。

如果  $E_1, E_2 \in \mathcal{E}_+$ , 以  $E_1 \times E_2$  记它们的乘积, 则称  $E_1 \times E_2$  在上述映射之下所诱导出来的测度为  $E_1$  与  $E_2$  的卷积, 记为  $E_1 * E_2$ , 于是

$$(E_1 * E_2)(Y) = (E_1 \times E_2)(\varphi^{-1}(Y)), \quad Y \in N.$$

同样, 当  $E_1, \dots, E_n \in \mathcal{E}_+$  时, 定义它们的卷积  $E_1 * E_2 * \dots * E_n$  如下,

$$(E_1 * E_2 * \dots * E_n)(Y) \\ = (E_1 \times E_2 \times \dots \times E_n)((\mu_1, \dots, \mu_n): \mu_1 + \dots + \mu_n \in Y), \quad Y \in N.$$

由卷积的定义, 下列各式成立:

$$(c_1 E_1 + c_2 E_2) * E_3 = c_1 (E_1 * E_3) + c_2 (E_2 * E_3);$$

$$(E_1 * E_2) * E_3 = E_1 * (E_2 * E_3), \quad E_1 * E_2 = E_2 * E_1,$$

其中  $E_1, E_2, E_3 \in \mathcal{E}_+$ ,  $c_1, c_2$  是非负实数。特别, 我们令

$$E^n = \underbrace{E * \dots * E}_{n \text{ 次}}, \quad E \in \mathcal{E}_+,$$

称为  $E$  的  $n$  次卷积, 当  $n=0$  时, 定义  $E^0 = \delta_0$ 。

在卷积运算之下,  $\mathcal{F}_N$  是封闭的, 即当  $P_1, P_2 \in \mathcal{F}_N$  时,  $P_1 * P_2 \in \mathcal{F}_N$ 。

但是两个简单点分布的卷积, 已不一定是简单的了, 例如任取  $a \in X$ , 设  $E$  是集中于  $\delta_a$  的简单点分布, 即  $E(\delta_a) = 1$ , 则  $E^2$  是集中于  $2\delta_a$  的分布,  $E^2(2\delta_a) = 1$ , 它不是简单的。

55. 定理 设  $P, Q \in \mathcal{P}_n$ , 则  $P * Q$  是简单的当且仅当:

1)  $P$  与  $Q$  都是简单的;

2) 下式成立

$$\{a: a \in X, P(\mu: \mu(a) > 0) > 0\} \cap \{a: a \in X, Q(\mu: \mu(a) > 0) > 0\} = \emptyset.$$

证明 必要性 由定义

$$(P * Q)(N_s) = (P \times Q)(\mu + \lambda \in N_s) = \int 1_{N_s}(\mu + \lambda) P \times Q(d\mu \times d\lambda)$$

$$\leq \iint 1_{N_s}(\mu) 1_{N_s}(\lambda) P(d\mu) Q(d\lambda) = P(N_s) Q(N_s),$$

所以如果  $(P * Q)(N_s) = 1$ , 则  $P(N_s) = Q(N_s) = 1$ , 而对固定的  $a \in X$  有,

$$P(\mu: \mu(a) > 0) Q(\mu: \mu(a) > 0) = (P \times Q)((\mu: \mu(a) > 0) \times (\mu: \mu(a) > 0))$$

$$\leq (P * Q)(\mu: \mu(a) \geq 2) = 0,$$

这表示或者  $P(\mu: \mu(a) > 0) = 0$ , 或者  $Q(\mu: \mu(a) > 0) = 0$ , 于是条件 1) 和 2) 成立.

充分性 设条件 1) 和 2) 成立. 由于  $\{a: a \in X, P(\mu: \mu(a) > 0) > 0\}$  至多可数, 设为  $\{a_1, a_2, \dots, a_n, \dots\}$ , 又由于  $Q$  的简单性及条件 2) 得

$$Q(\bigcup_{n=1}^{\infty} \{\lambda: \lambda(a_n) > 0\}) \leq \sum_{n=1}^{\infty} Q(\lambda: \lambda(a_n) > 0) = 0,$$

于是  $Q(N_s \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} \{\lambda: \lambda(a_n) > 0\}) = 1$ , 而且对任意固定的  $\lambda \in N_s \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} \{\lambda: \lambda(a_n) > 0\}$ , 例如说

$$\lambda = \sum_{n=1}^{\infty} \delta_{b_n}, \text{ 有}$$

$$(\mu: \mu \in N_s, \mu + \lambda \notin N_s) \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} (\mu: \mu(b_n) > 0),$$

注意到  $b_n \neq a_n$ , 故

$$P(\mu: \mu \in N_s, \mu + \lambda \notin N_s) \leq \sum_{n=1}^{\infty} P(\mu: \mu(b_n) > 0) = 0,$$

于是

$$\begin{aligned} (P * Q)(N_s) &= \int 1_{N_s}(\mu + \lambda) (P \times Q)(d\mu \times d\lambda) \\ &= \int_{N_s \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} \{\lambda: \lambda(a_n) > 0\}} P(\mu: \mu + \lambda \in N_s) Q(d\lambda) = 1, \end{aligned}$$

这说明  $P * Q$  是简单点分布.

56. 对于  $P \in \mathcal{P}_n$ , 在 §7 中定义了  $P$  的 Laplace 泛函, 这个定义可以推广到  $\mathcal{S}_+$  上去, 即对  $E \in \mathcal{S}_+$ , 定义

$$\mathcal{W}_E(f) = \int_{\mathcal{S}_+} e^{-\langle f, \mu \rangle} P(d\mu), \quad f \in \mathcal{S}_m,$$

并称  $\mathcal{W}_E(\cdot)$  为  $E$  的 Laplace 泛函。

§ 7 中的结果, 经过适当的修改, 对  $E \in \mathcal{E}_+$  的 Laplace 泛函也成立。例如当  $E_1, E_2 \in \mathcal{E}_+$  时,

$$\mathcal{W}_{E_1 \otimes E_2}(f) = \mathcal{W}_{E_1}(f) \mathcal{W}_{E_2}(f), \quad f \in \mathcal{F}_{m+n} \quad (1)$$

又  $E_1 = E_2$ , 当且仅当

$$\mathcal{W}_{E_1}(f) = \mathcal{W}_{E_2}(f), \quad \forall f \in \mathcal{F}_n \quad (2)$$

特别对于  $E \in \mathcal{E}_+$  的  $n$  次卷积, 有

$$\mathcal{W}_{E^{(n)}}(f) = (\mathcal{W}_E(f))^n, \quad f \in \mathcal{F}_{m+n} \quad (3)$$

如果  $E_1, E_2 \in \mathcal{E}_+$  并且  $E_1 = E_2^{(n)}$ , 则我们称  $E_2$  是  $E_1$  的  $n$  次卷积根。

**57. 定理** 设  $E \in \mathcal{E}_+$ ,  $n > 0$ , 则  $E$  的  $n$  次卷积根如果存在, 则必唯一。

**证明** 假定  $E_1 \in \mathcal{E}_+$ ,  $E_1^n = E$ , 则

$$\mathcal{W}_{E_1}(f) = (\mathcal{W}_E(f))^{\frac{1}{n}}, \quad f \in \mathcal{F}_n$$

由于  $\mathcal{W}_E(f)$  的全部  $n$  次方根可表为

$$|\mathcal{W}_E(f)|^{\frac{1}{n}} \exp\left(\frac{2kh\pi}{n}i\right), \quad 0 \leq h \leq n-1,$$

上述各根中, 仅当  $h=0$  时为实数; 又因  $\mathcal{W}_{E_1}(f) \geq 0$  所以  $\mathcal{W}_{E_1}(f) = |\mathcal{W}_E(f)|^{\frac{1}{n}}$ , 凡  $f \in \mathcal{F}_n$ , 由前段的 (2) 得到  $E_1$  的唯一性。证毕。

**58. 定义** 设  $E \in \mathcal{E}_+$ , 令

$$(\exp E)(\cdot) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} E^k(\cdot),$$

则  $\exp E$  是  $(N, N)$  上的测度。由于

$$(\exp E)(N) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} E^k(N) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} (E(N))^k = \exp(E(N)) < \infty,$$

故  $\exp E \in \mathcal{E}_+$ , 容易算出它的 Laplace 泛函为,

$$\mathcal{W}_{\exp E}(f) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} (\mathcal{W}_E(f))^k = \exp(\mathcal{W}_E(f)), \quad f \in \mathcal{F}_m.$$

**59. 定理** 映射

$$E \mapsto \exp E$$

是  $\mathcal{E}_+$  到  $\mathcal{E}_+$  内的——映射。

**证明** 设  $E_1, E_2 \in \mathcal{E}_+$ , 并且  $\exp E_1 = \exp E_2$ , 要证明  $E_1 = E_2$ 。实际上, 由前述知

$$\exp(\mathcal{W}_{E_1}(f)) = \mathcal{W}_{\exp E_1}(f) = \mathcal{W}_{\exp E_2}(f) = \exp(\mathcal{W}_{E_2}(f)), \quad \forall f \in \mathcal{F}_n,$$

所以  $\mathcal{W}_{E_1}(f) = \mathcal{W}_{E_2}(f)$ ,  $\forall f \in \mathcal{F}_n$ , 从而  $E_1 = E_2$ 。

容易由计算得出

$$\exp(E_1 + E_2) = (\exp E_1) * (\exp E_2),$$

事实上

$$\begin{aligned} \exp(E_1 + E_2) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} (E_1 + E_2)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \sum_{l=0}^k \frac{k!}{l!(k-l)!} E_1^l * E_2^{k-l} \\ &= \left( \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{l!} E_1^l \right) * \left( \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{l!} E_2^l \right) = (\exp E_1) * (\exp E_2). \end{aligned}$$

## §10. $\mathscr{G}_2$ 型分布

60. 定义 设  $E \in \mathscr{S}_+$ , 令

$$\mathscr{W}_E = e^{-E(N)} \exp E,$$

则  $\mathscr{W}_E$  是  $(N, N)$  上的测度, 并且因为  $\mathscr{W}_E(N) = 1$ , 所以  $\mathscr{W}_E \in \mathscr{P}_N$ , 称如此定义的点分布为  $\mathscr{W}_E$  型分布.

由上面所述, 当  $E_1, E_2 \in \mathscr{S}_+$  时,

$$\mathscr{W}_{E_1 + E_2} = \mathscr{W}_{E_1} * \mathscr{W}_{E_2}.$$

$\mathscr{W}_E$  分布的 Laplace 泛函为:

$$\begin{aligned} \mathscr{W}_{\mathscr{W}_E}(f) &= \int e^{-\mu f} \mathscr{W}_E(d\mu) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} e^{-E(N)} \int e^{-\mu f} E^n(d\mu) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} e^{-E(N)} \int e^{-(\mu_1 f + \dots + \mu_n f)} (E \times \dots \times E)(d\mu_1 \times \dots \times d\mu_n) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} e^{-E(N)} \left( \int e^{-\mu f} E(d\mu) \right)^n = e^{-E(N)} \cdot \exp \left( \int e^{-\mu f} E(d\mu) \right) \\ &= \exp \left( - \int (1 - e^{-\mu f}) E(d\mu) \right). \end{aligned}$$

所以

$$-\log \mathscr{W}_{\mathscr{W}_E}(f) = \int (1 - e^{-\mu f}) E(d\mu), \quad f \in \mathscr{S}_m^+.$$

与  $P \in \mathscr{P}_N$  一样, 对于  $E \in \mathscr{S}_+$ , 分别以  $A$  和  $E_{A_1, \dots, A_m}$  记  $E$  在映射  $\mu \mapsto A\mu$  和映射  $\mu \mapsto (\mu(A_1), \dots, \mu(A_m))$  之下所诱导出的测度. 于是  $A E(A \in \mathscr{S})$  是  $(N, N)$  上的测度, 满足

$$A E(Y) = E(\mu: A\mu \in Y), \quad Y \in \mathscr{N}_1,$$

而  $E_{A_1, \dots, A_m}$  是  $Z_+^m$  上的测度, 满足

$$E_{A_1, \dots, A_m}(l_1, \dots, l_m) = E(\mu: \mu(A_1) = l_1, \dots, \mu(A_m) = l_m),$$

这里  $A_1, \dots, A_m \in \mathscr{S}, l_1, \dots, l_m \in Z_+$ . 当  $m, A_1, \dots, A_m$  变动时, 称测度族  $\{E_{A_1, \dots, A_m}; m \geq 1,$

$A_1, \dots, A_m \in \mathcal{A}$  为  $\mathcal{B}$  的有限维分布族。

容易由计算得出, 对  $A \in \mathcal{A}, E \in \mathcal{S}$ , 有

$${}_A(\exp E) = \exp({}_A E),$$

而对任意的  $A_1, \dots, A_m \in \mathcal{A}$ , 有

$$(\exp E)_{A_1, \dots, A_m} = \exp(E_{A_1, \dots, A_m}).$$

$\mathcal{W}_E$  型分布具有下列性质。

**61. 定理** 设  $E \in \mathcal{S}, A, A_1, \dots, A_m \in \mathcal{A}$ , 则

- 1)  $\mathcal{W}_E = \mathcal{W}_{E((\cdot) \setminus \{0\})}$ ;
- 2)  ${}_A(\mathcal{W}_E) = \mathcal{W}_{{}_A E} = \mathcal{W}_{({}_A E)((\cdot) \setminus \{0\})}$ , 这里  $\{0\}$  表示  $\{\mu: \mu(A) = 0\}$ ;
- 3)  $(\mathcal{W}_E)_{A_1, \dots, A_m} = \mathcal{W}_{E_{A_1, \dots, A_m}} = \mathcal{W}_{(E_{A_1, \dots, A_m})((\cdot) \setminus \{0\})}$ ;
- 4)  $\mathcal{W}_E(\mu: \mu(A) = 0) = e^{-E(\mu: \mu(A) > 0)}$ ;
- 6)  $\mathcal{W}_E(\mu: \mu(A_1) = 0 | \mu(A_2) = 0) = \exp(-E(\mu: \mu(A_1) > 0, \mu(A_2) = 0))$ .

**证明** 1) 由定义, 对任意的  $c \geq 0$ ,

$$\mathcal{W}_{E\delta_0} = e^{-c} \sum_{h=0}^{\infty} \frac{1}{h!} (c\delta_0)^h = e^{-c} \sum_{h=0}^{\infty} \frac{c^h}{h!} \delta_0^h = \delta_0,$$

所以

$$\begin{aligned} \mathcal{W}_E &= \mathcal{W}_{E((\cdot) \setminus \{0\}) + E(\{0\})\delta_0} = \mathcal{W}_{E((\cdot) \setminus \{0\})} * \mathcal{W}_{E(\{0\})\delta_0} \\ &= \mathcal{W}_{E((\cdot) \setminus \{0\})} * \delta_0 = \mathcal{W}_{E((\cdot) \setminus \{0\})}, \quad 1) \text{ 获证;} \end{aligned}$$

2), 3) 由 1) 得到;

4) 我们有

$$\mathcal{W}_E(\mu: \mu(A) = 0) = e^{-E(\mu)} \sum_{h=0}^{\infty} \frac{1}{h!} E^h(\mu: \mu(A) = 0),$$

但  $E^h(\mu: \mu(A) = 0) = (E(\mu: \mu(A) = 0))^h$ , 代入上式得

$$\begin{aligned} \mathcal{W}_E(\mu: \mu(A) = 0) &= e^{-E(\mu)} \sum_{h=0}^{\infty} \frac{1}{h!} (E(\mu: \mu(A) = 0))^h \\ &= e^{-E(\mu)} \cdot \exp(E(\mu: \mu(A) = 0)) = \exp(-E(\mu: \mu(A) > 0)), \end{aligned}$$

5) 由 4) 知  $\mathcal{W}_E(\mu: \mu(A_2) = 0) > 0$ , 所以

$$\begin{aligned} \mathcal{W}_E(\mu: \mu(A_1) = 0 | \mu(A_2) = 0) &= \frac{\mathcal{W}_E(\mu: \mu(A_1) = 0, \mu(A_2) = 0)}{\mathcal{W}_E(\mu: \mu(A_2) = 0)} \\ &= \exp(E(\mu: \mu(A_2) > 0)) \mathcal{W}_E(\mu: \mu(A_1 \cup A_2) = 0) \\ &= \exp(-E(\mu: \mu(A_1) > 0, \mu(A_2) = 0)). \quad \text{定理证毕。} \end{aligned}$$

**62.** 下面我们来计算  $\mathcal{W}_E$  型分布的矩。首先对于  $E \in \mathcal{S}$ , 定义其一阶矩和二阶矩测度如

下,

$$I_E(A) = \int \mu(A) E(d\mu), \quad A \in \mathcal{A},$$

$$I_B^{(1)}(A_1 \times A_2) = \int \mu(A_1 \mu)(A_2) E(d\mu), \quad A_1, A_2 \in \mathcal{A},$$

如果对于任意有界的  $A \in \mathcal{A}$ , 有

$$I_B(A) < \infty, \quad I_B^{(1)}(A \times A) < \infty,$$

我们就说  $B$  的一、二阶矩存在。此时, 在 Laplace 泛函

$$\Psi_B(f) = \int e^{-\mu f} B(d\mu)$$

中分别令  $f = t_1 A_1$  或  $t_1 1_{A_1} + t_2 1_{A_2}$ , 则

$$I_B(A) = -\frac{d}{dt} \Psi_B(t 1_A) \Big|_{t=0} \quad (1)$$

$$I_B^{(1)}(A_1 \times A_2) = \frac{\partial^2}{\partial t_1 \partial t_2} \Psi_B(t_1 1_{A_1} + t_2 1_{A_2}) \Big|_{t_1=0, t_2=0} \quad (2)$$

现在考虑分布  $\mathcal{W}_B$ , 设  $A \in \mathcal{A}$  任意, 因为

$$\begin{aligned} \int \mu(A) E^k(d\mu) &= \int (\mu_1 + \dots + \mu_k)(A) (E \times \dots \times E)(d\mu_1 \times \dots \times d\mu_k) \\ &\leq \int \prod_{i=1}^k (1 + \mu_i(A)) (E \times \dots \times E)(d\mu_1 \times \dots \times d\mu_k) = \left( \int (1 + \mu(A)) E(d\mu) \right)^k, \\ \int (\mu(A))^2 E^k(d\mu) &= \int ((\mu_1 + \dots + \mu_k)(A))^2 (E \times \dots \times E)(d\mu_1 \times \dots \times d\mu_k) \\ &\leq \int \prod_{i=1}^k (1 + \mu_i(A))^2 (E \times \dots \times E)(d\mu_1 \times \dots \times d\mu_k) = \left( \int (1 + \mu(A))^2 E(d\mu) \right)^k, \end{aligned}$$

所以当  $I_B$  及  $I_B^{(1)}$  存在时, 有

$$\begin{aligned} I_{\mathcal{W}_B}(A) &= \int \mu(A) \mathcal{W}_B(d\mu) = e^{-\pi(N)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \int \mu(A) E^k(d\mu) \\ &\leq e^{-\pi(N)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \left( \int (1 + \mu(A)) E(d\mu) \right)^k < \infty, \\ I_B^{(1)}(A \times A) &= \int (\mu(A))^2 \mathcal{W}_B(d\mu) = e^{-\pi(N)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \int (\mu(A))^2 E^k(d\mu) \\ &\leq e^{-\pi(N)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \left( \int (1 + \mu(A))^2 E(d\mu) \right)^k < \infty, \end{aligned}$$

即  $\mathcal{W}_B$  的一、二阶矩也存在, 于是我们可以利用前面的公式(1)与(2), 并且注意到

$$\Psi_{\mathcal{W}_B}(f) = \exp \left\{ - \int (1 - e^{-\mu f}) B(d\mu) \right\}, \quad f \in \mathcal{F}_{m++},$$

直接算出,

$$I_{\mathcal{W}_B}(A) = I_B(A), \quad I_{\mathcal{W}_B}^{(1)}(A_1 \times A_2) = I_B^{(1)}(A_1 \times A_2) + I_B(A_1) I_B(A_2).$$

下面我们刻划简单的 $\mathscr{W}_E$ 分布。称 $E \in \mathscr{E}_+$ 是连续的(或扩散的), 如果对每一 $a \in X$ , 都有

$$E(\mu_1 \mu(a) > 0) = 0,$$

这等价于对每一 $a \in X$ ,  $I_E(a) = 0$ 。

**63. 定理** 分布 $\mathscr{W}_E$ 是简单点分布的充分必要条件是:  $E$ 是连续的和简单的。

**证明** 设 $\mathscr{W}_E$ 是简单点分布, 则由于

$$\mathscr{W}_E = \mathscr{W}_{\frac{E}{\frac{1}{2}E}} * \mathscr{W}_{\frac{E}{\frac{1}{2}E}}$$

根据定理55之2)可知对任意 $a \in X$ 有

$$\mathscr{W}_{\frac{E}{\frac{1}{2}E}}(\mu_1 \mu(a) > 0) = 0,$$

即 $I_{\frac{E}{\frac{1}{2}E}}(a) = I_{\frac{1}{2}E}(a) = 0$ , 这表明 $\frac{1}{2}E$ 是连续的, 从而 $E$ 是连续的, 又由于

$$0 = \mathscr{W}_E(\mu_1 \mu \notin N_E) = e^{-E(N)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} E^k(\mu_1 \mu \notin N_E),$$

推知 $E(\mu_1 \mu \notin N_E) = 0$ , 即 $E$ 是简单的。

反之, 设 $E$ 连续而且简单, 仍由定理55知道 $E^n(n \geq 0)$ 都是简单的, 从而 $\mathscr{W}_E$ 也是简单的。

下面我们研究 $\mathscr{W}_E$ 分布的无后效性。先证明如下的引理。

**64. 引理** 设 $E \in \mathscr{E}_+$ ,  $A_1, \dots, A_m \in \mathscr{E}$ 且互不相交, 则下述命题等价:

- 1)  $A_1, \dots, A_m, \mu$ 关于分布 $\mathscr{W}_E$ 相互独立;
- 2)  $\mu(A_1), \dots, \mu(A_m)$ 关于分布 $\mathscr{W}_E$ 相互独立;
- 3) 对任意的 $i, j$ ,  $i \neq j$ ,  $1 \leq i, j \leq m$ ,  $\mu(A_i)$ 与 $\mu(A_j)$ 关于 $\mathscr{W}_E$ 相互独立;
- 4) 对于任意的 $i, j$ ,  $i \neq j$ ,  $1 \leq i, j \leq m$ 有

$$E(\mu_1 \mu(A_i) > 0, \mu(A_j) > 0) = 0.$$

**证明** 1)  $\Rightarrow$  2)  $\Rightarrow$  3) 是不足道的。往证3)  $\Rightarrow$  4)。由条件3)及定理61之4)与5)得

$$\begin{aligned} & \exp(-E(\mu_1 \mu(A_i) > 0, \mu(A_j) = 0)) \\ &= \mathscr{W}_E(\mu_1 \mu(A_i) = 0 | \mu(A_j) = 0) = \mathscr{W}_E(\mu_1 \mu(A_i) = 0) \\ &= \exp(-E(\mu_1 \mu(A_i) > 0)), \end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned} & E(\mu_1 \mu(A_i) > 0, \mu(A_j) > 0) \\ &= E(\mu_1 \mu(A_i) > 0) - E(\mu_1 \mu(A_i) > 0, \mu(A_j) = 0) = 0. \end{aligned}$$

4)  $\Rightarrow$  1)。设条件4)成立, 为证映射 $A_1, \dots, A_m, \mu$ 关于分布 $\mathscr{W}_E$ 的相互独立性, 须证它们所产生的 $\sigma$ 代数 $\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_m, \mathcal{N}$ 关于分布 $\mathscr{W}_E$ 相互独立。又因为 $\sigma$ 代数 $\mathcal{A}_i$  ( $1 \leq i \leq m$ ) 是

由映射族 $\mu \sim \mu(B)$ ,  $B \subset A_i$ , 所产生的, 即 $\mathcal{A}_i \mathcal{N} = \sigma(\mu(B), B \subset A_i)$ , 所以问题又归于证明 $(\mathcal{N}, \mathcal{N}, \mathscr{W}_E)$ 上的随机变量族

$$\{\mu(B)_1, B \subset A_1\}, \dots, \{\mu(B)_i, B \subset A_i\}$$

的相互独立性。为此又只须证明对任意的 $n_1, \dots, n_m$ , 随机向量

$$(\mu(B_{11}), \dots, \mu(B_{1n_1}), \dots, (\mu(B_{m1}), \dots, \mu(B_{mn_m})))$$

是相互独立的。其中 $B_{i1}, \dots, B_{in_i}$ 是 $A_i$ 的互不相交子集,  $1 \leq i \leq m$ 。



设  $t_{11}, \dots, t_{1n_1}, \dots, t_{m1}, \dots, t_{mn_m}$  是非负实数, 则

$$\begin{aligned} & \int \exp\left(-\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^{n_i} t_{ij} \cdot \mu(B_{ij})\right) \mathscr{W}_E(d\mu) = \mathscr{W}_E\left(\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^{n_i} t_{ij} \cdot 1_{B_{ij}}\right) \\ &= \exp\left\{-\int \left(1 - \exp\left(-\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^{n_i} t_{ij} \cdot \mu(B_{ij})\right)\right) E(d\mu)\right\} \\ &= \prod_{i=1}^m \exp\left\{-\int \left(1 - \exp\left(-\sum_{j=1}^{n_i} t_{ij} \cdot \mu(B_{ij})\right)\right) E(d\mu)\right\} \\ &= \prod_{i=1}^m \int \exp\left(-\sum_{j=1}^{n_i} t_{ij} \cdot \mu(B_{ij})\right) \mathscr{W}_E(d\mu), \end{aligned}$$

上式右边的第三个等号是由于条件4)成立。于是得

$$\begin{aligned} & (\mathscr{W}_E)_{\mu_{11}, \dots, \mu_{1n_1}, \dots, \mu_{m1}, \dots, \mu_{mn_m}} \\ &= \prod_{i=1}^m (\mathscr{W}_E)_{\mu_{i1}, \dots, \mu_{in_i}}, \end{aligned}$$

这便证明了我们所要求的独立性。

**65. 定理** 分布  $\mathscr{W}_E$  是无后效的, 当且仅当

$$E(\mu; \mu \text{ 不是 } n\delta_0 \text{ 形式}, a \in X, n \in \mathbb{Z}_+) = 0.$$

**证明** 设

$$Y = \{\mu; \mu \text{ 具有 } n\delta_0 \text{ 形式}, a \in X, n \in \mathbb{Z}_+\},$$

则  $Y$  与  $\{\mu; \mu \in N, \mu^*(X) \leq 1\}$  重合, 从而  $Y \in N$ .

现假定  $E(N \setminus Y) = 0$ , 设  $A_1, \dots, A_m \in \mathscr{A}$  且互不相交, 则对任意的  $i, j, i \neq j, 1 \leq i, j \leq m$  有

$$E(\mu; \mu(A_i) > 0, \mu(A_j) > 0) = 0,$$

于是由上面的引理知  $A_1\mu, \dots, A_m\mu$  关于分布  $\mathscr{W}_E$  相互独立, 由定理34知  $\mathscr{W}_E$  无后效。

反之, 设  $\mathscr{W}_E$  无后效, 又设  $(\mathscr{D}_n)$  是  $X$  的无穷小分割序列, 则

$$\begin{aligned} & E(\mu; \mu^*(X) > 1) \\ &= \sup_n E(\mu; \text{存在 } D_1, D_2 \in \mathscr{D}_n, D_1 \neq D_2, \mu(D_1) > 0, \mu(D_2) > 0), \end{aligned}$$

但由上面的引理知对每一  $n$ , 有

$$E(\mu; \text{存在 } D_1, D_2 \in \mathscr{D}_n, D_1 \neq D_2, \mu(D_1) > 0, \mu(D_2) > 0) = 0,$$

所以  $E(\mu; \mu^*(X) > 1) = 0$ , 即  $E(N \setminus Y) = 0$ . 证毕。

## §10. 点过程的疏稀

**66.** 设  $\xi = \xi(\omega, \cdot)$  是点过程, 当  $\omega \in \Omega$  固定时,  $\xi(\omega, \cdot)$  是  $(X, \rho_X)$  上的一个计数测度, 于是可表为:

$$\xi(\omega, \cdot) = \sum_{m=1}^{\infty} \delta_{a_m},$$

其中  $(a_1, \dots, a_s, \dots, a_m, \dots)$  是  $X$  中的有限或可列无穷点列, 诸  $a_m$  可能有重复, 并且是依赖于  $\omega$  的。如果对于这些点中的每一个, 以相互独立的方式和相同的概率保留或去掉, 这样我们就得到一个新的点过程, 称为点过程  $\xi$  的稀疏。

下面我们从事论上来详细讨论这一过程, 为此应该先将上面的直观描述严格化。

67. 设  $b_j, c_j$  是非负实数,  $j = 0, 1, 2, \dots$ , 则

$$\mu_1 = \sum_{j \in \mathbb{Z}_+} b_j \delta_j, \quad \mu_2 = \sum_{j \in \mathbb{Z}_+} c_j \delta_j$$

是  $\mathbb{Z}_+$  上的局部有限测度。以如下方式定义  $\mu_1$  与  $\mu_2$  的卷积:

$$\mu_1 * \mu_2 = \sum_{i, j \in \mathbb{Z}_+} c_i b_j \delta_{i+j}.$$

现设  $c \in [0, 1]$ , 定义算子  $\mathcal{D}_c$

$$\mathcal{D}_c \delta_l = ((1-c)\delta_0 + c\delta_1)^l, \quad l \in \mathbb{Z}_+.$$

上式右边是  $\mathbb{Z}_+$  上的测度  $(1-c)\delta_0 + c\delta_1$  的  $l$  次卷积 (当  $l=0$  时定义这个卷积为  $\delta_0$ ), 称  $\mathcal{D}_c$  为  $\mathbb{Z}_+$  上的稀疏算子, 其中  $c$  称为  $\mathcal{D}_c$  的浓度。显然, 如果  $c=1$ , 则  $\mathcal{D}_c \delta_l = \delta_l$ 。现设

$$\mu = \sum_{j \in \mathbb{Z}_+} c_j \delta_j, \quad (c_j \geq 0, j \in \mathbb{Z}_+)$$

定义

$$\mathcal{D}_c \mu = \sum_{j \in \mathbb{Z}_+} c_j \mathcal{D}_c \delta_j.$$

进一步考虑  $\mathbb{Z}_+^m$  上的测度

$$\mu = \sum_{(l_1, \dots, l_m) \in \mathbb{Z}_+^m} c(l_1, \dots, l_m) \delta_{(l_1, \dots, l_m)},$$

其中对于每一  $(l_1, \dots, l_m) \in \mathbb{Z}_+^m$ , 有  $c(l_1, \dots, l_m) \geq 0$ 。我们令

$$\mathcal{D}_c \mu = \sum_{(l_1, \dots, l_m) \in \mathbb{Z}_+^m} c(l_1, \dots, l_m) \mathcal{D}_c \delta_{(l_1, \dots, l_m)},$$

其中

$$\mathcal{D}_c \delta_{(l_1, \dots, l_m)} = \prod_{i=1}^m (\mathcal{D}_c \delta_{l_i}),$$

我们也称  $\mathcal{D}_c$  为  $\mathbb{Z}_+^m$  上的稀疏算子。

现在回到我们原来的讨论, 即考虑  $(N, \mathbb{N})$  上的有限测度  $B \in \mathcal{B}_+$ 。下面的定理, 当  $B = Pe\mathcal{T}_N$  时就是稀疏点过程的存在定理。

68. 定理 设  $c \in [0, 1]$ ,  $B \in \mathcal{B}_+$ , 则在  $(N, \mathbb{N})$  上存在唯一的有限测度  $\mathcal{D}_c B \in \mathcal{B}_+$ , 适合条件: 对  $\mathcal{B}$  中任意互不相交的  $A_1, \dots, A_m$  有

■

$$(\mathcal{D}_c B)_{A_1, \dots, A_m}$$

$$= \sum_{(l_1, \dots, l_m) \in \mathbb{Z}_+^m} E(\mu: \mu(A_j) = l_j, 1 \leq j \leq m) \prod_{i=1}^m \mathcal{D}_c \delta_{l_i}.$$

**证明 存在性** 无妨设  $E \in \mathcal{P}_N$ , 否则可考虑  $B/E(N)$ . 设  $E = P \in \mathcal{P}_N$ , 对不相交的  $A_1, \dots, A_m \in \mathcal{S}$ , 令

$$P^{A_1, \dots, A_m} = \sum_{(l_1, \dots, l_m) \in \mathbb{Z}_+^m} P_{A_1, \dots, A_m}(l_1, \dots, l_m) \prod_{i=1}^m \mathcal{D}_c \delta_{l_i},$$

容易验证概率分布族

$$\{P^{A_1, \dots, A_m}; m \geq 1, A_1, \dots, A_m \in \mathcal{S} \text{ 且互不相交}\}$$

是Kolmogorov相容族。现在证明它还满足定理13的条件3)。

设  $A = A_k \cup \dots \cup A_m$ ,  $0 \leq k < m$ 。我们要证, 对任意  $n_1, \dots, n_k \in \mathbb{Z}_+$  有

$$\begin{aligned} & P^{A_1, \dots, A_{k-1}, A}(n_1, \dots, n_k) \\ &= \sum_{j_k + \dots + j_m = n_k} P^{A_1, \dots, A_m}(n_1, \dots, n_{k-1}, j_k, \dots, j_m). \end{aligned}$$

由上面的定义有

$$\begin{aligned} & P^{A_1, \dots, A_{k-1}, A}(n_1, \dots, n_k) \\ &= \sum_{(l_1, \dots, l_k) \in \mathbb{Z}_+^k} P_{A_1, \dots, A_{k-1}, A}(l_1, \dots, l_k) \mathcal{D}_c \delta_{(l_1, \dots, l_k)}(n_1, \dots, n_k) \\ &= \sum_{(l_1, \dots, l_k) \in \mathbb{Z}_+^k} \sum_{h_k + \dots + h_m = l_k} P_{A_1, \dots, A_{k-1}, h_k, \dots, h_m}(l_1, \dots, l_{k-1}, h_k, \dots, h_m) \\ &\quad \times \mathcal{D}_c \delta_{(l_1, \dots, l_{k-1}, l_k)}(n_1, \dots, n_k) \\ &= \sum_{(l_1, \dots, l_k) \in \mathbb{Z}_+^k} \sum_{h_k + \dots + h_m = l_k} P_{A_1, \dots, A_m}(l_1, \dots, l_{k-1}, h_k, \dots, h_m) \\ &\quad \times \sum_{j_k + \dots + j_m = n_k} \mathcal{D}_c \delta_{(l_1, \dots, l_{k-1}, h_k, \dots, h_m)}(n_1, \dots, n_{k-1}, j_k, \dots, j_m) \\ &= \sum_{j_k + \dots + j_m = n_k} \sum_{l_1, \dots, l_{k-1}, h_k, \dots, h_m} P_{A_1, \dots, A_m}(l_1, \dots, l_{k-1}, h_k, \dots, h_m) \\ &\quad \times \mathcal{D}_c \delta_{(l_1, \dots, l_{k-1}, h_k, \dots, h_m)}(n_1, \dots, n_{k-1}, j_k, \dots, j_m) \\ &= \sum_{j_k + \dots + j_m = n_k} P^{A_1, \dots, A_m}(n_1, \dots, n_{k-1}, j_k, \dots, j_m), \end{aligned}$$

这就证明了定理13中的条件3)。又因为显然有

$$P^{A_m}(0) \geq P_{A_m}(0), \quad A_m \in \mathcal{S}, \quad A_m \not\equiv \phi,$$

所以定理13中条件4)也满足, 从而由定理13知, 满足本定理条件的  $\mathcal{D}_c P$  是存在的。

唯一性 对于  $P \in \mathcal{P}_\infty$ , 上面求得的  $\mathcal{D}_c P$  也在  $\mathcal{P}_\infty$  中, 而由推论 5 得其唯一性. 这个结果对于  $E \in \mathcal{E}$  也成立. 证毕

下面是  $\mathcal{D}_c$  算子的一些重要性质.

首先由定义可见,  $\mathcal{D}_c \delta_l$  作为  $Z_+$  上的概率测度是以  $c, l$  为参数的二项分布, 所以

$$\mathcal{D}_c \delta_l(n) = \binom{l}{n} c^n (1-c)^{l-n}, \quad 0 \leq n \leq l.$$

现设  $E \in \mathcal{E}$ , 在其 Laplace 变换  $\Psi_E(f)$  中取  $f = \sum_{i=1}^m 1_{A_i} \log \frac{1}{h_i}$ ,  $A_i \in \mathcal{A}$ ,  $0 < h_i \leq 1$ ,  $1 \leq i \leq m$ , 则

$$\begin{aligned} \Psi_E \left( \sum_{i=1}^m 1_{A_i} \log \frac{1}{h_i} \right) &= \int (h_1^{\mu(A_1)} \cdots h_m^{\mu(A_m)}) E(d\mu) \\ &= \sum_{(l_1, \dots, l_m) \in Z_+^m} (h_1^{l_1} \cdots h_m^{l_m}) E_{A_1, \dots, A_m}(l_1, \dots, l_m), \end{aligned}$$

我们称  $\Psi_E \left( \sum_{i=1}^m 1_{A_i} \log \frac{1}{h_i} \right)$  为  $E_{A_1, \dots, A_m}$  的母函数.

69. 引理 设  $E \in \mathcal{E}$ ,  $c \in (0, 1]$ ,  $A_1, \dots, A_m \in \mathcal{A}$  且互不相交, 则

$$\begin{aligned} \Psi_{\mathcal{D}_c E} \left( \sum_{i=1}^m 1_{A_i} \log \frac{1}{h_i} \right) \\ = \Psi_E \left( \sum_{i=1}^m 1_{A_i} \log \frac{1}{(1-c) + ch_i} \right), \quad 0 < h_i \leq 1, \quad 1 \leq i \leq m. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{证明} \quad \Psi_{\mathcal{D}_c E} \left( \sum_{i=1}^m 1_{A_i} \log \frac{1}{h_i} \right) \\ = \sum_{(n_1, \dots, n_m) \in Z_+^m} h_1^{n_1} \cdots h_m^{n_m} \sum_{(l_1, \dots, l_m) \in Z_+^m} E_{A_1, \dots, A_m}(l_1, \dots, l_m) \\ \times \prod_{i=1}^m \mathcal{D}_c \delta_{l_i}(n_i, \dots, n_m) \\ = \sum_{(n_1, \dots, n_m) \in Z_+^m} (ch_1)^{n_1} \cdots (ch_m)^{n_m} \sum_{\substack{(l_1, \dots, l_m) \in Z_+^m \\ l_i \geq n_i, 1 \leq i \leq m}} E_{A_1, \dots, A_m}(l_1, \dots, l_m) \\ \left( \frac{l_1}{n_1} \right) \cdots \left( \frac{l_m}{n_m} \right) (1-c)^{l_1-n_1} \cdots (1-c)^{l_m-n_m} \\ = \sum_{(l_1, \dots, l_m) \in Z_+^m} ((1-c) + ch_1)^{l_1} \cdots ((1-c) + ch_m)^{l_m} E_{A_1, \dots, A_m}(l_1, \dots, l_m) \\ = \Psi_E \left( \sum_{i=1}^m 1_{A_i} \log \frac{1}{(1-c) + ch_i} \right). \end{aligned}$$

70. 定理 设  $c, c_1, c_2 \in (0, 1]$ ,  $a_1, a_2$  为非负实数,  $E, E_1, E_2 \in \mathcal{E}$ , 则

- 1)  $\mathcal{D}_c(a_1 E_1 + a_2 E_2) = a_1 \mathcal{D}_c E_1 + a_2 \mathcal{D}_c E_2$ ;
- 2)  $\mathcal{D}_c(E_1 * E_2) = (\mathcal{D}_c E_1) * (\mathcal{D}_c E_2)$ ;
- 3)  $\mathcal{D}_{c_1}(\mathcal{D}_{c_2} E) = \mathcal{D}_{c_1 c_2} E$ ;
- 4)  $\mathcal{D}_c(\exp E) = \exp(\mathcal{D}_c E)$ ;
- 5) 如果  $0 < c \leq 1$ , 则  $E \mapsto \mathcal{D}_c E$  是  $\mathcal{E}_+$  到  $\mathcal{E}_+$  内的一一映射。

证明 1) 显然。

2) 设  $A_1, \dots, A_m \in \mathcal{A}$  且互不相交,  $0 < h_1, \dots, h_m \leq 1$ , 由上面的引理得

$$\begin{aligned} \Psi_{\mathcal{D}_c(E_1 * E_2)} \left( \sum_{i=1}^m 1_{A_i} \log \frac{1}{h_i} \right) &= \Psi_{E_1 * E_2} \left( \sum_{i=1}^m 1_{A_i} \log \frac{1}{(1-c) + ch_i} \right) \\ &= \Psi_{E_1} \left( \sum_{i=1}^m 1_{A_i} \log \frac{1}{(1-c) + ch_i} \right) \Psi_{E_2} \left( \sum_{i=1}^m 1_{A_i} \log \frac{1}{(1-c) + ch_i} \right) \\ &= \Psi_{\mathcal{D}_{c_1} E_1} \left( \sum_{i=1}^m 1_{A_i} \log \frac{1}{h_i} \right) \Psi_{\mathcal{D}_{c_2} E_2} \left( \sum_{i=1}^m 1_{A_i} \log \frac{1}{h_i} \right) \\ &= \Psi_{\mathcal{D}_{c_1 c_2} E_1 * E_2} \left( \sum_{i=1}^m 1_{A_i} \log \frac{1}{h_i} \right), \end{aligned}$$

这说明

$$(\mathcal{D}_c(E_1 * E_2))_{A_1, \dots, A_m} = (\mathcal{D}_c E_1 * \mathcal{D}_c E_2)_{A_1, \dots, A_m}.$$

由推论 5, 可知 2) 成立。

3) 仍设  $A_1, \dots, A_m \in \mathcal{A}$ , 且互不相交,  $0 < h_1, \dots, h_m \leq 1$ , 两次运用上面的引理得

$$\Psi_{\mathcal{D}_{c_2}(\mathcal{D}_{c_1} E)} \left( \sum_{i=1}^m 1_{A_i} \log \frac{1}{h_i} \right) = \Psi_{\mathcal{D}_{c_1 c_2} E} \left( \sum_{i=1}^m 1_{A_i} \log \frac{1}{h_i} \right),$$

再由推论 5 知 3) 成立。

4) 仍设  $A_1, \dots, A_m \in \mathcal{A}$  互不相交,  $0 < h_1, \dots, h_m \leq 1$ , 令  $f = \sum_{i=1}^m 1_{A_i} \log \frac{1}{h_i}$ , 然后应

用前面的引理及公式:

$$\Psi_{\exp f}(f) = \exp(\Psi_{\mathcal{D}_c} f).$$

5) 设  $E_1, E_2 \in \mathcal{E}_+$ ,  $c > 0$ ,  $\mathcal{D}_c E_1 = \mathcal{D}_c E_2$ , 又设  $A_1, \dots, A_m$  属于  $\mathcal{A}$  且互不相交。对于固定的  $(h_1, \dots, h_m) \in (1-c, 1]^m$ , 方程组  $h_i = (1-c) + ch_i$ ,  $1 \leq i \leq m$  在  $(0, 1]^m$  中有唯一解  $(\tilde{h}_1, \dots, \tilde{h}_m)$ , 于是

$$\begin{aligned} \Psi_{E_1} \left( \sum_{i=1}^m 1_{A_i} \log \frac{1}{h_i} \right) &= \Psi_{E_1} \left( \sum_{i=1}^m 1_{A_i} \log \frac{1}{(1-c) + ch_i} \right) \\ &= \Psi_{\mathcal{D}_c E_1} \left( \sum_{i=1}^m 1_{A_i} \log \frac{1}{h_i} \right) = \Psi_{\mathcal{D}_c E_2} \left( \sum_{i=1}^m 1_{A_i} \log \frac{1}{h_i} \right) \\ &= \Psi_{E_2} \left( \sum_{i=1}^m 1_{A_i} \log \frac{1}{\tilde{h}_i} \right), \end{aligned}$$

这说明  $(E_1)_{A_1, \dots, A_m}$  与  $(E_2)_{A_1, \dots, A_m}$  的母函数在  $(1-c, 1]^m$  上相等, 所以  $(E_1)_{A_1, \dots, A_m} = (E_2)_{A_1, \dots, A_m}$ , 从而  $E_1 = E_2$ 。

### 第三章 无穷可分点过程

本章讨论最重要的一类点过程：无穷可分点过程，首先力求完整而详细地叙述无穷可分点过程的构造和分类，然后分别讨论 Poisson 过程、Gauss-Poisson 过程、正规无穷可分点过程和奇异无穷可分点过程，并为下一章研究点过程的收敛性作好准备。

#### §1. 预备：有限变差测度

1. 定义  $(N, N)$  上定义的全有限广义测度记为  $\mathcal{E}_T$ 。由 Jordan 分解定理，对任意的  $E \in \mathcal{E}_T$ ，存在唯一的  $E^+ \in \mathcal{E}_+$ ， $E^- \in \mathcal{E}_-$ ，使

$$E = E^+ - E^-,$$

记

$$\|E\| = E^+(N) + E^-(N),$$

容易证明  $\|\cdot\|$  是  $\mathcal{E}_T$  上的范数， $(\mathcal{E}_T, \|\cdot\|)$  是 Banach 空间。

下述引理对任意可测空间上的有限变差测度也成立。

2. 引理 设  $N_1$  是  $N$  的子代数， $\sigma(N_1) = N$ ，则对任意的  $E \in \mathcal{E}_T$  有

$$\|E\| = \sup_{\mathcal{A}} \sum_{Y \in \mathcal{A}} |E(Y)|$$

其中  $\mathcal{A}$  跑遍  $N_1$  中互不相交的有限族。

证明 对于  $N$  中任意互不相交的有限族  $\mathcal{A}$  有，

$$\begin{aligned} \sum_{Y \in \mathcal{A}} |E(Y)| &= \sum_{Y \in \mathcal{A}} |E^+(Y) - E^-(Y)| \\ &\leq \sum_{Y \in \mathcal{A}} E^+(Y) + \sum_{Y \in \mathcal{A}} E^-(Y) \leq E^+(N) + E^-(N) = \|E\| \end{aligned}$$

另一方面，存在  $Y_0 \in N_1$ ，使

$$E^+(\cdot) = E(\cdot \cap Y_0),$$

$$E^-(\cdot) = -E(\cdot \cap Y_0^c),$$

命  $|E| = E^+ + E^-$ 。由于  $\sigma(N_1) = N$ ，对任意的  $\varepsilon > 0$ ，存在  $Y_\varepsilon \in N_1$  使

$$|E|(Y_\varepsilon \Delta Y_0) < \varepsilon,$$

此处  $\Delta$  表示对称差。于是

$$\begin{aligned} &|E(Y_\varepsilon)| + |E(N \setminus Y_\varepsilon)| \\ &= |E^+(Y_\varepsilon) - E^-(Y_\varepsilon)| + |E^+(N \setminus Y_\varepsilon) - E^-(N \setminus Y_\varepsilon)| \\ &\geq -4\varepsilon + |E^+(Y_\varepsilon) - E^-(Y_\varepsilon)| + |E^+(N \setminus Y_\varepsilon) - E^-(N \setminus Y_\varepsilon)| = -4\varepsilon + \|E\|, \end{aligned}$$

由于  $N_1$  是代数， $Y_\varepsilon$  与  $N \setminus Y_\varepsilon$  都属于  $N_1$ ，又因  $\varepsilon$  是任意的，故引理得证。

下面的定理是上述引理的推论。

3. 定理 设  $E \in \mathcal{E}$ , 则

1) 如果  $\Gamma \subset \mathcal{A}$  是半环,  $L_{\mathcal{A}}(\Gamma) = \mathcal{A}$ , 则

$$\|E\| = \sup_{A_1, \dots, A_m} \|E_{A_1, \dots, A_m}\|,$$

其中  $A_1, \dots, A_m$  跑遍  $\Gamma$  中互不相交的有限族。

2) 设  $A_n \in \mathcal{A}$ ,  $A_n \uparrow X$ , 则

$$\|E\| = \sup_n \|E_{A_n}\|.$$

证明 1) 由上面的引理知, 对  $\sigma$  代数  $N_{A_1, \dots, A_m}$  中任意有限互不相交的集族  $\mathcal{N}$  有

$$\sum_{Y \in \mathcal{N}} |E(Y)| \leq \|E_{A_1, \dots, A_m}\| \leq \|E\|$$

另一方面, 设  $Y_1, \dots, Y_s \in \bigcup_{A_1, \dots, A_m} N_{A_1, \dots, A_m}$ , 则由引理 I.4 推知的存在  $A'_1, \dots, A'_s$  使

$Y_1, \dots, Y_s \in N_{A'_1, \dots, A'_s}$ , 因此再次应用上面的引理知

$$\|E\| = \sup_{\mathcal{N}} \sum_{Y \in \mathcal{N}} |E(Y)| = \sup_{A_1, \dots, A_m} \|E_{A_1, \dots, A_m}\|,$$

这里  $\mathcal{N}$  跑遍代数  $\tilde{N} = \bigcup_{A_1, \dots, A_m} N_{A_1, \dots, A_m}$  的互不相交的有限族, 而  $A_1, \dots, A_m$  跑遍  $\Gamma$  中互不相交的有限族。

2) 固定  $n$ , 设  $B_1, \dots, B_m \in \mathcal{A}$  互不相交并且  $B_1 \cup B_2 \cup \dots \cup B_m \subset A_n$ , 则

$$\|E_{B_1, \dots, B_m}\| = \| (E_{A_n})_{B_1, \dots, B_m} \| \leq \|E_{A_n}\| \leq \|E\|,$$

另一方面, 由于  $A_n \uparrow X$ , 故若以  $\Gamma$  记  $\mathcal{A}$  中能被某个  $A_n$  包含的有界集全体, 则  $\Gamma$  是  $\mathcal{A}$  的子环, 并且  $L_{\mathcal{A}}(\Gamma) = \mathcal{A}$ , 所以

$$\|E\| = \sup_{B_1, \dots, B_m} \|E_{B_1, \dots, B_m}\|,$$

其中  $B_1, \dots, B_m$  跑遍  $\Gamma$  中一切互不相交的有限族, 结合上面已证的不等式就得到所谓的结论。

4. 设  $E = E^+ - E^- \in \mathcal{E}$ , 命

$$\psi_{\pm}(f) = \psi_{E^{\pm}}(f) - \psi_{E^-}(f), \quad f \in \mathcal{F}_{m+},$$

并称  $\psi_{\pm}(\cdot)$  为  $E$  的 Laplace 变换。

定理 I.38 可以推广如下。如果  $E_1, E_2 \in \mathcal{E}$ , 并且

$$\psi_{E_1}(f) = \psi_{E_2}(f), \quad \text{凡 } f \in \mathcal{F}_{++},$$

则  $E_1 = E_2$ 。

事实上, 设  $E_1 = E_1^+ - E_1^-$  及  $E_2 = E_2^+ - E_2^-$  分别是  $E_1$  和  $E_2$  的 Jordan 分解, 则由

$$\psi_{E_1}(f) = \psi_{E_1^+}(f) - \psi_{E_1^-}(f) = \psi_{E_2^+}(f) - \psi_{E_2^-}(f) = \psi_{E_2}(f), \quad \text{凡 } f \in \mathcal{F}_{++},$$

推出

$$\psi_{E_1^+ + E_2^-}(f) = \psi_{E_2^+ + E_1^-}(f), \quad \forall f \in \mathcal{F}_+,$$

这说明  $E_1^+ + E_2^- = E_2^+ + E_1^-$  从而  $E_1^+ - E_1^- = E_2^+ - E_2^-$ , 即  $E_1 = E_2$ .

5. 设  $E_1, E_2 \in \mathcal{E}_r$ , 其 Jordan 分解分别为

$$E_1 = E_1^+ - E_1^-, \quad E_2 = E_2^+ - E_2^-,$$

定义它们的卷积为

$$\begin{aligned} E_1 * E_2 &= (E_1^+ - E_1^-) * (E_2^+ - E_2^-) \\ &= E_1^+ * E_2^+ + E_1^- * E_2^- - E_1^+ * E_2^- - E_1^- * E_2^+, \end{aligned}$$

于是  $E_1 * E_2 \in \mathcal{E}_r$ , 但上式不一定是  $E_1 * E_2$  的 Jordan 分解. 然而有

$$\begin{aligned} \|E_1 * E_2\| &\leq \|E_1^+ * E_2^+\| + \|E_1^- * E_2^-\| + \|E_1^+ * E_2^-\| + \|E_1^- * E_2^+\| \\ &= \|E_1^+\| \|E_2^+\| + \|E_1^-\| \|E_2^-\| + \|E_1^+\| \|E_2^-\| + \|E_1^-\| \|E_2^+\| \\ &= \|E_1\| \|E_2\|, \end{aligned}$$

特别, 当  $E_1 = \cdots = E_m = E$  时, 我们可以定义

$$E^{\otimes m} = E_1 * E_2 * \cdots * E_m,$$

并称  $E^{\otimes m}$  为  $E$  的  $m$  次卷积.

如果  $E_1, E_2 \in \mathcal{E}_r$ , 并且  $E_1^{\otimes m} = E_2$ , 则称  $E_1$  是  $E_2$  的  $m$  次卷积根, 记为  $E_1 = \sqrt[m]{E_2}$ .

容易从定义直接证明: 对于  $E_1, E_2 \in \mathcal{E}_r$ , 仍有

$$\psi_{E_1 * E_2}(f) = \psi_{E_1}(f) * \psi_{E_2}(f), \quad \forall f \in \mathcal{F}_{m+1}$$

特别

$$\psi_{E^{\otimes m}}(f) = (\psi_E(f))^m, \quad \forall f \in \mathcal{F}_{m+1}.$$

对于  $E \in \mathcal{E}_+$ , 在 § 9 中已经定义了  $\exp E$ . 现设  $E \in \mathcal{E}_r$ , 仍命

$$\exp E = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} E^k.$$

下面的一些结果是显然的. 首先有

$$\|\exp E\| \leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \|E\|^k = \exp(\|E\|),$$

其次对任意的  $E_1, E_2 \in \mathcal{E}_r$ , 有

$$\exp(E_1 + E_2) = (\exp E_1) * (\exp E_2),$$

而对于任意的  $A \in \mathcal{A}$ , 有

$${}_A(\exp E) = \exp({}_A E),$$

此外, 对于互不相交的  $A_1, \dots, A_m \in \mathcal{A}$  总有:

$$(\exp E)_{A_1, \dots, A_m} = \exp(E_{A_1, \dots, A_m}).$$



**6. 引理** 设  $E \in \mathcal{E}_r$ ,  $n$  是奇数. 则  $E$  最多有一个  $n$  次卷积根属于  $\mathcal{E}_r$ ; 若  $n$  是偶数, 则  $E$  最多有两个  $n$  次卷积根属于  $\mathcal{E}_r$ .

**证明** 设  $E$  存在  $n$  次卷积根  $E_1 = \sqrt[n]{E}$ , 则因

$$\Psi_n(f) = (\Psi_{E_1}(f))^n, \quad f \in \mathcal{F}_+,$$

且由于方程  $\Psi_n(f) = x^n$  在  $n$  为奇数时只有一个实数解, 而在  $n$  为偶数时最多有两个实数解, 所以当  $n$  为奇数时,  $E_1$  必唯一; 而当  $n$  是偶数时  $\mathcal{E}_r$  中至多存在两个不同的  $E_1$  使  $E_1 = \sqrt[n]{E}$ .

现在可将定理 II. 59 推广如下:

**7. 定理** 映像  $E \mapsto \exp E$  是  $\mathcal{E}_r$  到自身的——映像.

**证明** 设  $E_1, E_2 \in \mathcal{E}_r$  满足  $\exp E_1 = \exp E_2 = E$ , 则由  $\Psi_n(\cdot) = \exp(\Psi_{E_1}(\cdot)) = \exp(\Psi_{E_2}(\cdot))$  推知  $\Psi_{E_1}(\cdot) = \Psi_{E_2}(\cdot)$ , 所以  $E_1 = E_2$ .

由于这个结果, 当  $E = \exp E_0$  时, 就记为

$$E_0 = \log E,$$

特别当  $\|E - \delta_0\| < 1$  时, 令

$$E_0 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} (E - \delta_0)^k,$$

右边的级数绝对收敛. 我们有:

$$\Psi_{E_0}(f) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} (\Psi_n(f) - 1)^k, \quad f \in \mathcal{F}_{m+},$$

所以

$$\Psi_n(f) = \exp(\Psi_{E_0}(f)), \quad f \in \mathcal{F}_{m+},$$

从而  $E = \exp E_0$ , 即  $E_0 = \log E$ .

应用这一结果, 可以证明下面的定理.

**8. 定理** 设  $E \in \mathcal{E}_r$ , 则  $\log E$  存在的充要条件为:

- 1)  $E(\{0\}) > 0$ ;
- 2) 对任意的奇数  $2k+1$ , 存在  $E$  的  $2k+1$  次卷积根, 记作  $E_{2k+1}$ ,  $E_{2k+1} \in \mathcal{E}_r$ , 并且  $\lim_{k \rightarrow \infty} \|E_{2k+1}\| = 1$ .

**证明** 必要性 如果  $L = \log E$ ,  $L \in \mathcal{E}_r$ , 则由  $E = \exp L$ , 得知  $\sqrt[n]{E} = \exp(\frac{1}{n}L)$  存在, 并且

$$E(\{0\}) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} L^k(\{0\}) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} (L(\{0\}))^k = \exp(L(\{0\})) > 0,$$

又当  $n \rightarrow \infty$  时有

$$\left\| \exp\left(\frac{1}{n}L\right) - 1 \right\| = \left\| \delta_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} \left(\frac{1}{n}L\right)^k - \delta_0 \right\|$$

$$\leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} \left( \frac{1}{n} \right)^k (\|L\|)^k \rightarrow 0.$$

充分性 设条件1)和2)成立。则由

$$(E_{2k+1})^{2k+1} = E$$

推出

$$(E_{2k+1}(\{0\}))^{2k+1} = E(\{0\}) > 0,$$

从而

$$\lim_{k \rightarrow \infty} E_{2k+1}(\{0\}) = \lim_{k \rightarrow \infty} (E(\{0\}))^{\frac{1}{2k+1}} = 1,$$

然而

$$\begin{aligned} \|E_{2k+1}((\circ) \setminus \{0\})\| &= E_{2k+1}^+(N \setminus \{0\}) + E_{2k+1}^-(N \setminus \{0\}) \\ &= E_{2k+1}^+(N) + E_{2k+1}^-(N) - |E_{2k+1}(\{0\})| \\ &= \|E_{2k+1}\| - |E_{2k+1}(\{0\})| \rightarrow 0, \text{ 当 } k \rightarrow \infty, \end{aligned}$$

于是当  $k$  趋于  $\infty$  时有:

$$\|E_{2k+1} - \delta_0\| \leq \|E_{2k+1}((\circ) \setminus \{0\})\| + |E_{2k+1}(\{0\}) - 1| \rightarrow 0;$$

根据上一段最后的结果, 只要  $\|E_{2k+1} - \delta_0\| < 1$ , 则  $\log E_{2k+1}$  就存在, 因此  $\log E = (2k+1) \log E_{2k+1}$  亦存在。证毕。

## §2. 无穷可分分布的刻画 (一)

9. 定义 设  $\xi$  是点过程, 如果对任意的正整数  $n$ , 存在相互独立同分布的点过程  $\xi_1, \dots, \xi_n$  使

$$\xi \stackrel{d}{=} \xi_1 + \dots + \xi_n,$$

则称  $\xi$  是无穷可分点过程。

设  $\xi$  是无穷可分的, 如果它的分布记为  $P\xi^{-1}$ , 而上述表达式中  $\xi_1, \dots, \xi_n$  的分布是  $P\xi_1^{-1} = \dots = P\xi_n^{-1}$ ,

则

$$P\xi^{-1} = (P\xi_1^{-1}) * \dots * (P\xi_n^{-1}) = (P\xi_1^{-1})^n,$$

从而对任意正整数  $n$ ,  $P\xi^{-1}$  的  $n$  次卷积根存在。

设  $P \in \mathcal{S}_N$ , 称  $P$  是无穷可分的, 如果对于任意的正整数  $n$ ,  $\exists \tilde{P}$  存在且属于  $\mathcal{S}_N$ 。

全部无穷可分分布记为  $\mathcal{S}_{IN}$ 。

本章的全部内容在于建立无穷可分分布的一般理论。这一节只考虑一个简单的情形, 下面的定理11是本节的主要结果, 首先证明一个引理。

10. 引理 设  $P \in \mathcal{S}_N$  可表为  $\mathcal{S}_E$  形式,  $G \in \mathcal{S}_+$ 。如果  $B(\{0\}) = 0$ , 则  $E$  是唯一的, 并且

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|n\mathcal{V}\overline{P}((\cdot) \setminus \{0\}) - E\| = 0$$

**证明** 当  $P - \mathcal{V}_E = e^{-E(h)} \exp E$  时, 对任意正整数  $n$  有:

$$\mathcal{V}\overline{P} = e^{-\frac{\|E\|}{n}} \exp\left(-\frac{E}{n}\right) = \mathcal{V}\left(\frac{E}{n}\right),$$

由定理 1.61 知:

$$(n\mathcal{V}\overline{P})((\cdot) \setminus \{0\}) = n\mathcal{V}\left(\frac{E}{n}\right)((\cdot) \setminus \{0\})$$

$$= e^{-\frac{\|E\|}{n}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} \frac{1}{n^{k-1}} E^k = \left(e^{-\frac{\|E\|}{n}}\right) \left(E + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k!} \frac{1}{n^{k-1}} E^k\right),$$

从而由  $E(\{0\}) = 0$  得:

$$\begin{aligned} & \| (n\mathcal{V}\overline{P})((\cdot) \setminus \{0\}) - E \| \\ & \leq \left\| \left(e^{-\frac{\|E\|}{n}}\right) E - E \right\| + e^{-\frac{\|E\|}{n}} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\|E\|^k}{k! n^{k-1}} \\ & \leq \left(1 - e^{-\frac{\|E\|}{n}}\right) \|E\| + \frac{\|E\|^2}{n}, \end{aligned}$$

令  $n \rightarrow \infty$  就得:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|n\mathcal{V}\overline{P}((\cdot) \setminus \{0\}) - E\| = 0.$$

**11. 定理**  $P \in \mathcal{S}_N$  具有形式  $\mathcal{V}_E$ ,  $E \in \mathcal{C}_+$ , 当且仅当: 1)  $P \in \mathcal{S}_{1N}$ , 2)  $P(\mu: \mu(X) = 0) = P(\{0\}) > 0$ .

**证明 必要性** 对任意的正整数  $n$ , 已知

$$\mathcal{V}\left(\frac{E}{n}\right) = n\sqrt{\mathcal{V}_E},$$

所以  $P = \mathcal{V}_E$  总是无穷可分的. 又由定理 1.61 知

$$P(\{0\}) = \mathcal{V}_E(\mu: \mu(X) = 0) = e^{-E(\mu: \mu(X) > 0)} > 0.$$

**充分性** 现设  $P \in \mathcal{S}_{1N}$  并且  $P(\{0\}) > 0$ . 由于  $P$  是无穷可分的, 故  $\mathcal{V}\overline{P}$  存在并且  $\|\mathcal{V}\overline{P}\| = 1$ , 从而由定理 8,  $\log P$  唯一存在, 即存在某个  $L \in \mathcal{S}_r$ , 使得:

$$P = \exp L,$$

令

$$E(\cdot) = L((\cdot) \setminus \{0\}),$$

则

$$P = \exp(E + L(\{0\})\delta_0) = e^{L(\{0\})} \exp E,$$

又由  $P(N) = 1$  得

$$1 = P(N) = (\exp L)(N) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} (L(N))^k = \exp(L(N)),$$

从而  $L(N) = 0$ , 于是由上面  $E$  的定义, 得

$$E(N) = L(N \setminus \{0\}) = -L(\{0\}),$$

代入上面  $P$  的表达式得

$$P = e^{-E(N)} \exp E,$$

由  $\mathscr{E}_E$  型分布的定义, 还须证明  $E \in \mathscr{E}_E$ . 由于  $E \in \mathscr{E}_r$ , 并且  $P = e^{-E(N)} \exp E$  存在  $2k+1$  次卷积根,

$$\begin{aligned} {}^{2k+1}\sqrt{P} &= \exp(-E(N)/(2k+1)) \exp\left(\frac{1}{2k+1}E\right) \\ &= \exp(-E(N)/(2k+1)) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{1}{(2k+1)^n} E^n, \end{aligned}$$

注意到  $E(\{0\}) = 0$  及  $\delta_0((\cdot) \setminus \{0\}) = 0$  得到,

$$\begin{aligned} (2k+1)({}^{2k+1}\sqrt{P}((\cdot) \setminus \{0\})) \\ = \exp(-E(N)/(2k+1)) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{1}{(2k+1)^{n-1}} E^n, \end{aligned}$$

重复前面引理的证明可得

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|(2k+1) {}^{2k+1}\sqrt{P}((\cdot) \setminus \{0\}) - E\| = 0,$$

于是可知  $E \in \mathscr{E}_E$ , 从而  $P = \mathscr{E}_E$  确为  $\mathscr{E}_E$  型分布.

上面的定理刻画了  $\mathscr{E}_E$  型分布, 同时也部分地给出了无穷可分分布的表达式, 即当  $P(\{0\}) > 0$  时的无穷可分分布就是  $\mathscr{E}_E$  型分布. 我们稍后还将给出满足  $P(\{0\}) = 0$  的无穷可分分布的表达式.

下面的推论指出了一类重要的无穷可分分布. 首先引入一个定义.

**12. 定义** 设  $P \in \mathscr{P}_N$ , 称  $P$  是有限点分布, 如果

$$P(\mu: \mu(X) < \infty) = 1.$$

有限点分布是一类很重要的分布, 我们也称分布为有限点分布的点过程为有限点过程.

**13. 推论** 设  $P \in \mathscr{P}_N$ , 且  $P$  是有限点分布, 则  $P$  是无穷可分的, 当且仅当  $P$  是  $\mathscr{E}_E$  型分布.

**证明** 由定理 11, 只须证明  $P(\{0\}) > 0$ . 假定  $P(\{0\}) = 0$ , 则  $\mathscr{V}\bar{P}(\{0\}) = 0$ , 或  $\mathscr{V}\bar{P}(\mu: \mu(X) \geq 1) = 1$ .

于是

$$\begin{aligned} P(\mu: \mu(X) \geq n) &= (\mathscr{V}\bar{P})^n(\mu: \mu(X) \geq n) \\ &\geq (\mathscr{V}\bar{P}(\mu: \mu(X) \geq 1))^n = 1, \end{aligned}$$

令  $n \rightarrow \infty$  则得  $P(\mu: \mu(X) = \infty) = 1$ , 这与  $P$  为有限点分布的假设矛盾.

### §3 依范数收敛

**14.** 我们已知  $(\mathscr{E}_r, \|\cdot\|)$  是一个 Banach 空间 (我们虽然采用 Banach 空间这一术

语,但本书的任何结果,均不依赖于Banach空间的理论).于是可在 $\mathcal{S}_r$ 中引入距离如下:

$$d(E_1, E_2) = \|E_1 - E_2\|, E_1, E_2 \in \mathcal{S}_r,$$

称 $\mathcal{S}_r$ 中的元按距离 $d$ 的收敛为依范数收敛。

显然有 $\mathcal{S}_N \subset \mathcal{S}_+ \subset \mathcal{S}_r$ , 并且 $\mathcal{S}_N$ 和 $\mathcal{S}_+$ 都是距离空间 $(\mathcal{S}_r, d)$ 的闭子集。

本节考虑点分布的依范数收敛问题。即在空间 $(\mathcal{S}_N, d)$ 中的收敛问题。首先证明几个不等式。

**15. 引理** 设 $P_1, \dots, P_m, Q_1, \dots, Q_m \in \mathcal{S}_N$ , 则

$$\left\| \sum_{i=1}^m P_i - \sum_{i=1}^m Q_i \right\| \leq \sum_{i=1}^m \|P_i - Q_i\|.$$

**证明** 我们有

$$\begin{aligned} & \left\| \sum_{i=1}^m P_i - \sum_{i=1}^m Q_i \right\| \\ &= \left\| \sum_{i=1}^m P_1 * \dots * P_{i-1} * Q_{i+1} * \dots * Q_m * (P_i - Q_i) \right\| \leq \sum_{i=1}^m \|P_i - Q_i\|. \end{aligned}$$

**16. 引理** 设 $E_1, E_2 \in \mathcal{S}_+$ , 则

$$\|\mathcal{S}_{E_1} - \mathcal{S}_{E_2}\| \leq 2\|E_1 - E_2\|.$$

**证明** 为方便起见, 命

$$L_i = E_i - E_i(N)\delta_0, (i=1, 2)$$

对于正整数 $n$ , 有

$$\|\mathcal{S}_{E_1} - \mathcal{S}_{E_2}\| = \|\exp L_1 - \exp L_2\| = |(\exp(n^{-1}L_1))^n - (\exp(n^{-1}L_2))^n|,$$

应用引理15, 得

$$\begin{aligned} \|\mathcal{S}_{E_1} - \mathcal{S}_{E_2}\| &\leq n\|\exp(n^{-1}L_1) - \exp(n^{-1}L_2)\| \\ &= n\|n^{-1}L_1 - n^{-1}L_2 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k! n^k} (L_1^k - L_2^k)\| \\ &\leq \|L_1 - L_2\| + \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k! n^{k-1}} (\|L_1\|^k + \|L_2\|^k) \\ &\leq \|E_1 - E_2\| + \|E_1(N)\delta_0 - E_2(N)\delta_0\| + \frac{1}{n} (\|L_1\|^2 e^{\|L_1\|} + \|L_2\|^2 e^{\|L_2\|}), \end{aligned}$$

命 $n \rightarrow \infty$  就得

$$\|\mathcal{S}_{E_1} - \mathcal{S}_{E_2}\| \leq 2\|E_1 - E_2\|.$$

**17. 引理** 对任意的 $P \in \mathcal{S}_N$  有

$$\|P - \mathcal{S}_P\| \leq 2(1 - P(\{0\})).$$

**证明** 命 $c = 1 - P(\{0\})$  则

$$\|P - \mathcal{S}_P\| = \|P - e^{-c} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} (P(\{0\} \setminus \{0\})^k)$$

$$= \left\| P(\cdot \setminus \{0\}) + (1-c)\delta_0 - e^{-c} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} (P(\cdot \setminus \{0\}))^k \right\|,$$

注意  $e^{-c} \geq 1-c$  则

$$\begin{aligned} \|P - \mathcal{P}\| &\leq e^{-c} - (1-c) + (1-e^{-c}) \|P(\cdot \setminus \{0\})\| \\ &\quad + e^{-c} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k!} \|P(\cdot \setminus \{0\})\|^k \\ &\leq \frac{c^2}{2} + c(1-e^{-c}) + e^{-c} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{c^k}{k!} \leq \frac{c^2}{2} + c^2 + \frac{c^2}{2} \left( e^{-c} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{2c^{k-2}}{k!} \right) \leq 2c^2. \end{aligned}$$

结合引理15、17直接得如下的推论。

18. 推论 设  $P_1, \dots, P_m \in \mathcal{P}_N$ , 则

$$\left\| \sum_{i=1}^m P_i - \mathcal{P} \sum_{i=1}^m P_i \right\| \leq 2 \sum_{i=1}^m (1 - P_i(\{0\}))^2.$$

下面是依范数收敛的一个简单结果。首先我们注意一个事实：设  $E_k \in \mathcal{E}_r$ , 如果  $\|E_k - \delta_0\| < 1$  且  $\lim_{k \rightarrow \infty} \|E_k - \delta_0\| = 0$ , 则有

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|\log E_k\| = 0,$$

事实上由定义可知

$$\log E_k = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-1)^{j+1}}{j} (E_k - \delta_0)^j,$$

所以

$$\|\log E_k\| \leq \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j} (\|E_k - \delta_0\|)^j,$$

从而  $\lim_{k \rightarrow \infty} \|\log E_k\| = 0$ 。

19. 定理 设  $E, E_n \in \mathcal{E}_r$ ,  $n=1, 2, \dots$ , 则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|\mathcal{P}_{E_n} - \mathcal{P}_E\| = 0,$$

当且仅当

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|E_n(\cdot \setminus \{0\}) - E(\cdot \setminus \{0\})\| = 0.$$

证明 由于  $\mathcal{P}_E = \mathcal{P}_{E(\cdot \setminus \{0\})}$ , 所以不妨设

$$E(\{0\}) = E_n(\{0\}) = 0.$$

由引理16推知, 当  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|E_n - E\| = 0$  时有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|\mathcal{P}_{E_n} - \mathcal{P}_E\| = 0.$$

现设  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|E_n - E\| = 0$ 。由于

$$\begin{aligned} & \|\exp[(E_n - E) - (\|E_n\| - \|E\|)\delta_0] - \delta_0\| \\ &= \|(\exp(-E + \|E\|\delta_0) \\ & \quad * (\exp(E_n - \|E_n\|\delta_0) - \exp(E - \|E\|\delta_0)))\| \\ &\leq \|\exp(-E + \|E\|\delta_0)\| \|E_n - E\|, \end{aligned}$$

得到

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|\exp[(E_n - E) - (\|E_n\| - \|E\|)\delta_0] - \delta_0\| = 0,$$

应用本定理前的注意, 又得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|(E_n - E) - (\|E_n\| - \|E\|)\delta_0\| = 0,$$

由于已经假定  $E_n(\{0\}) = E(\{0\}) = 0$ , 故

$$\begin{aligned} & \| (E_n - E) - (\|E_n\| - \|E\|)\delta_0 \| \\ &= ((E_n - E) - (\|E_n\| - \|E\|)\delta_0)^+(N) + ((E_n - E) - (\|E_n\| - \|E\|)\delta_0)^-(N) \\ &= (E_n - E)^+(N) + (E_n - E)^-(N) + |\|E_n\| - \|E\|| \\ &= \|E_n - E\| + |\|E_n\| - \|E\||, \end{aligned}$$

所以得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|E_n - E\| = 0.$$

20. 定义 设  $\{P_{nj} : 1 \leq j \leq k_n, n = 1, 2, \dots\} \subset \mathcal{P}_N$  是  $\mathcal{P}_N$  中元素作成的三角序列,

如果

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \min_{1 \leq j \leq k_n} P_{nj}(\{0\}) = 1,$$

则称  $\{P_{nj}\}$  为强无穷小三角序列。

上面定义中的关系式, 显然又等价于

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \max_{1 \leq j \leq k_n} P_{nj}(\mu : \mu(X) \geq 1) = 0.$$

下面的定理是本节的主要结果。

21. 定理 设  $\{P_{nj}\}$  是强无穷小三角序列, 则存在  $E \in \mathcal{E}_+$ ,  $E(\{0\}) = 0$  并使

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\| \sum_{j=1}^{k_n} P_{nj} - E \right\| = 0$$

的充要条件为

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\| \sum_{j=1}^{k_n} P_{nj}(\{0\}^c) - E \right\| = 0.$$

证明 首先注意

$$\sum_{j=1}^{k_n} (1 - P_{nj}(\{0\}))^2 \leq \max_{1 \leq j \leq k_n} (1 - P_{nj}(\{0\})) \times \sum_{j=1}^{k_n} (1 - P_{nj}(\{0\}))$$

$$= (1 - \min_{1 \leq j \leq h_n} P_{nj}(\{0\})) \sum_{j=1}^{h_n} P_{nj}(\mu; \mu \neq 0),$$

现在若设

$$\left\| \sum_{j=1}^{h_n} P_{nj}(\{0\} \setminus \{0\}) - E \right\| \longrightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty,$$

则更有

$$\sum_{j=1}^{h_n} P_{nj}(\mu; \mu \neq 0) \longrightarrow E(N), \quad n \rightarrow \infty,$$

由上面的注意就有

$$\sum_{j=1}^{h_n} (1 - P_{nj}(\{0\}))^2 \longrightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty,$$

由推论18

$$\left\| \sum_{j=1}^{h_n} P_{nj} - \mathcal{E} \sum_{1 \leq j \leq h_n} P_{nj} \right\| \longrightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty,$$

又由定理19得出

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{j=1}^{h_n} P_{nj} - \mathcal{E} \right\| &\leq \left\| \sum_{j=1}^{h_n} P_{nj} - \mathcal{E} \sum_{1 \leq j \leq h_n} P_{nj} \right\| \\ &+ \left\| \mathcal{E} \sum_{1 \leq j \leq h_n} P_{nj} - \mathcal{E} \right\| \longrightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty; \end{aligned}$$

反之, 若存在  $E \in \mathcal{S}$ , 使

$$\left\| \sum_{j=1}^{h_n} P_{nj} - \mathcal{E} \right\| \longrightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty,$$

则当  $n \rightarrow \infty$  时有

$$\sum_{j=1}^{h_n} P_{nj}(\{0\}) = \prod_{j=1}^{h_n} P_{nj}(\{0\}) \longrightarrow \mathcal{E}(\{0\}) = e^{-E(N)},$$

或者

$$\sum_{j=1}^{h_n} (1 - \log(1 - P_{nj}(\{0\}))) \longrightarrow E(N), \quad n \rightarrow \infty,$$

由于  $-\log(1-x) \geq x$  (当  $0 \leq x < 1$ ), 所以

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^{h_n} (1 - P_{nj}(\{0\})) \leq E(N) < \infty,$$

应用前面的注意就是

$$\sum_{j=1}^{h_n} (1 - P_{nj}(\{0\}))^4 \longrightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty,$$



再次应用推论18及假定就有

$$\left\| \sum_{j=1}^{k_n} \mathcal{P}_{nj} - \mathcal{P}_n \right\| \longrightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty,$$

又由引理19得

$$\left\| \sum_{j=1}^{k_n} \mathcal{P}_{nj}(\cdot) - E \right\| \longrightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty,$$

定理证毕。

## §4. 广义 $\mathcal{P}_N$ 型分布

22. 在 §1.9 中我们定义了 $\mathcal{P}_N$ 型分布。本章定理11又证明了： $P \in \mathcal{P}_N$  是 $\mathcal{P}_N$ 型分布的充要条件是

$$P \in \mathcal{P}_{IN}, \quad P(\mu: \mu(X) = 0) = P(\{0\}) > 0.$$

这个结果完整地刻画了 $\mathcal{P}_N$ 型分布。

余下的问题是：满足条件

$$P \in \mathcal{P}_{IN}, \quad P(\{0\}) = 0$$

的无穷可分分布有怎样的形式？如果回答了这个问题，也就全部刻画了无穷可分分布。

本节与下一节的目的就在于回答这一问题。这一节先作一些准备，将 $\mathcal{P}_N$ 型分布进一步推广。

23. 定义 设 $\Delta$ 是可数集（有限或可列无穷）。考虑乘积空间

$$\left( \prod_{\delta \in \Delta} N_\delta, \prod_{\delta \in \Delta} \mathcal{P}_\delta \right), \quad N_\delta = N, \quad \mathcal{P}_\delta = \mathcal{P}, \quad \forall \delta \in \Delta,$$

设 $\{\mu_\delta: \delta \in \Delta\} \in \prod_{\delta \in \Delta} N$ ，为使 $\mu = \sum_{\delta \in \Delta} \mu_\delta \in N$ ，必须而只须对每个 $\delta \in \Delta$ ，都有

$$\sum_{\delta \in \Delta} \mu_\delta(A) < +\infty,$$

以 $N_\Delta$ 记全体满足上面条件的序列 $\{\mu_\delta: \delta \in \Delta\}$ ，易知

$$N_\Delta \subset \prod_{\delta \in \Delta} N_\delta, \quad N_\Delta \in \prod_{\delta \in \Delta} \mathcal{P}_\delta,$$

命

$$N_\Delta = \left( \prod_{\delta \in \Delta} N_\delta \right) \cap N_\Delta,$$

则映像

$$\{\mu_\delta: \delta \in \Delta\} \mapsto \sum_{\delta \in \Delta} \mu_\delta$$

是从 $(N_\Delta, \mathcal{P}_\Delta)$ 到 $(N, \mathcal{P})$ 的可测映像。

现设对每个 $\delta \in \Delta$ ，对应一个 $P_\delta \in \mathcal{P}_N$ 。如果

$$\left( \prod_{\delta \in \Delta} P_\delta \right)(N_\Delta) = 1,$$

则对 $Y \in N$ 命

$$(*P_{\delta})(Y) = \int 1_Y \left( \sum_{\delta \in \Delta} \mu_{\delta} \right) \left( \prod_{\delta \in \Delta} P_{\delta} \right) (d\mu_{\delta}),$$

如此定义的  $*P_{\delta} \in \mathcal{P}_{N_{\delta}}$  称为  $\{P_{\delta}: \delta \in \Delta\}$  的卷积。当  $\Delta$  是空集时, 规定这个卷积为  $\delta_0$ ,

当  $\Delta$  为非空有限集时, 这里的定义与前面的相同; 当  $\Delta$  是可列无穷集时, 称  $*P_{\delta}$  为无穷卷积。

必须注意, 只有满足条件

$$\left( \prod_{\delta \in \Delta} P_{\delta} \right) (N_{\delta}) = 1$$

的分布族  $\{P_{\delta}: \delta \in \Delta\}$  才有无穷卷积存在。这条件显然又等价于: 对任意  $A \in \mathcal{A}$ , 有  $\left( \prod_{\delta \in \Delta} P_{\delta} \right) (\{\mu_{\delta}: \delta \in \Delta\} \in N_{\delta}: \mu_{\delta}(A) > 0 \text{ 只对有限个 } \delta \in \Delta \text{ 成立}) = 1$ 。

**24. 引理** 分布族  $\{P_{\delta}: \delta \in \Delta\}$  的无穷卷积存在当且仅当对任意的  $A \in \mathcal{A}$  有

$$\sum_{\delta \in \Delta} P_{\delta}(\mu: \mu(A) > 0) < +\infty.$$

**证明** 对于每个  $\delta \in \Delta$ , 以  $\omega_{\delta}$  记往集

$$\{\mu_{\delta}: \delta \in \Delta: \mu_{\delta}(A) > 0\}, \quad A \in \mathcal{A},$$

由 Borel-Cantelli 引理,  $\sum_{\delta \in \Delta} P_{\delta}(\mu: \mu(A) > 0) = \sum_{\delta \in \Delta} \left( \prod_{\delta \in \Delta} P_{\delta} \right) (\omega_{\delta}) < \infty$  当且仅当,

$$\left( \prod_{\delta \in \Delta} P_{\delta} \right) (\limsup \omega_{\delta}) = 0,$$

而这又等价于,

$$\left( \prod_{\delta \in \Delta} P_{\delta} \right) (\{\mu_{\delta}: \delta \in \Delta: \mu_{\delta}(A) > 0 \text{ 仅对有限个 } \delta \in \Delta \text{ 成立}\}) = 1.$$

引理得证。

**25. 引理** 下面所述是无穷卷积的一些重要性质。当然我们恒假定有条件

$$\left( \prod_{\delta \in \Delta} P_{\delta} \right) (N_{\delta}) = 1.$$

1) 命  $P = *P_{\delta}$ , 则

$$\Psi_r(f) = \prod_{\delta \in \Delta} \Psi_{r_{\delta}}(f), \quad \forall f \in \mathcal{F}_{m+},$$

事实上, 如果我们将指标集  $\Delta$  排成序, 并以  $\Delta_n$  记前  $n$  个指标, 命  $P_n = \prod_{\delta \in \Delta_n} P_{\delta}$ , 则

$$\Psi_{r_n}(\cdot) = \prod_{\delta \in \Delta_n} \Psi_{r_{\delta}}(\cdot),$$

对任意的  $f \in \mathcal{F}_{m+}$ , 有

$$\begin{aligned} \Psi_{r_n}(f) &\geq \Psi_r(f) \approx \int e^{-\mu f} P(d\mu) \\ &= \int_{\mu_{\Delta}} \exp\left(-\sum_{\delta \in \Delta} \mu_{\delta} f\right) \left(\prod_{\delta \in \Delta} P_{\delta}\right)(d\mu_{\delta}) \end{aligned}$$

$$\geq \prod_{\partial^A} \int_N e^{-\mu_\partial} f P_\partial(d\mu_\partial) = \prod_{\partial^A} \Psi_{P_\partial}(f).$$

因此得到

$$\prod_{\partial^A} \Psi_{P_\partial}(f) = \lim_{n \rightarrow \infty} \Psi_{P_n}(f) \geq \Psi_r(f) \geq \prod_{\partial^A} \Psi_{P_\partial}(f).$$

2) 以  $I_r$  记  $P = \bigtimes_{\partial^A} P_\partial$  的强度测度, 则

$$I_r = \sum_{\partial^A} I_{r_\partial}.$$

事实上,

$$\begin{aligned} I_r &= \int \mu(\cdot) P(d\mu) = \int_N \left( \sum_{\partial^A} \mu_\partial(\cdot) \right) \left( \bigtimes_{\partial^A} P_\partial \right) (d\mu_\partial) \\ &= \sum_{\partial^A} \int \mu_\partial(\cdot) P_\partial(d\mu_\partial) = \sum_{\partial^A} I_{r_\partial}, \end{aligned}$$

3) 设指标集  $A$  又分成一些互不相交集之并

$$A = \bigcup_{j \in J} A_j,$$

则

$$\bigtimes_{\partial^A} P_\partial = \bigtimes_{j \in J} \left( \bigtimes_{\partial^{A_j}} P_\partial \right),$$

4) 对任意的  $A \in \mathcal{A}$  成立:

$$A \left( \bigtimes_{\partial^A} P_\partial \right) = \bigtimes_{\partial^A} (A P_\partial);$$

5) 对于任意的  $A_1, \dots, A_m \in \mathcal{A}$ , 有

$$\left( \bigtimes_{\partial^A} P_\partial \right)_{A_1, \dots, A_m} = \bigtimes_{\partial^A} ((P_\partial)_{A_1, \dots, A_m});$$

6) 下面两个条件等价:

a)  $\bigtimes_{\partial^A} P_\partial$  的强度测度是局部有限的;

b)  $\sum_{\partial^A} I_{r_\partial} \in N$ ;

上述结果都是显然的, 6) 可由 2) 推出.

20 定义 根据定理 1.61,  $\mathcal{W}_s$  型分布有如下性质

$$\mathcal{W}_s = \mathcal{W}(E(\cdot) \setminus \{0\}),$$

因此  $\mathcal{W}_s$  型分布与  $s$  不是一一对应的. 实际上, 若设  $c > 0$  是任意的正数, 则  $B$  与  $B + c\delta_0$  对应同一个  $\mathcal{W}_s$  型分布, 即

$$\mathcal{W}_s = \mathcal{W}_{s+c\delta_0},$$

但是, 如果我们命

$$s'_+ = \{s: s \in s_+, E(\{0\}) = 0\},$$

则  $s'_+$  与全体  $\mathcal{W}_s$  型分布是一一对应的 (见定理 11).

为了刻划全部无穷可分分布, 我们现在将  $\mathcal{S}'_0$  进一步扩大. 今后以  $\mathcal{S}_\infty$  记  $\mathcal{N}$  上一切满足下述条件的测度  $E$ :

- 1)  $E(\mu: \mu(A) > 0) < \infty$ , 凡  $A \in \mathcal{A}$ ;
- 2)  $E(\{0\}) = 0$ ,

显然  $\mathcal{S}'_0 \subset \mathcal{S}_\infty$ . 当  $E \in \mathcal{S}_\infty$  时,  $E$  不必是有限测度, 而  $\mathcal{S}'_0$  正好是  $\mathcal{S}_\infty$  中的全体有限测度. 然而  $E \in \mathcal{S}_\infty$  时,  $E$  必是  $\sigma$ -有限的. 事实上, 设  $\{A_n\}$  是  $X$  的一个分割,  $A_n \in \mathcal{A}$ ,  $n=1, 2, \dots$ . 命

$$Y_0 = \{0\}, \quad Y_1 = \{\mu: \mu(A_1) > 0\},$$

$$Y_2 = \{\mu: \mu(A_2) > 0, \mu(A_1) = 0\},$$

.....

$$Y_n = \{\mu: \mu(A_n) > 0, \mu(A_1) = \dots = \mu(A_{n-1}) = 0\},$$

则  $N = \bigcup_{n=0}^{\infty} Y_n$ , 而且  $E(Y_n) < \infty$ , 凡  $n=1, 2, \dots$ .

**27. 引理** 设对每个  $\delta \in \Delta$ ,  $E_\delta \in \mathcal{S}'_0$ . 为使卷积  $*_{\delta \in \Delta} \mathcal{W}_{E_\delta}$  存在, 必须而且只须  $\sum_{\delta \in \Delta} E_\delta \in \mathcal{S}_\infty$ .

**证明** 首先注意, 由定理 I. 61, 对固定的  $A \in \mathcal{A}$ , 有

$$\begin{aligned} \sum_{\delta \in \Delta} \mathcal{W}_{E_\delta}(\mu: \mu(A) > 0) &= \sum_{\delta \in \Delta} (1 - e^{-E_\delta(\mu: \mu(A) > 0)}) \\ &= \sum_{\delta \in \Delta} E_\delta(\mu: \mu(A) > 0) e^{-\theta_\delta E_\delta(\mu: \mu(A) > 0)}, \end{aligned}$$

其中  $0 < \theta_\delta < 1$ ,  $\delta \in \Delta$ .

**必要性** 设  $*_{\delta \in \Delta} \mathcal{W}_{E_\delta}$  存在, 由 Borel-Cantelli 引理 (见第 24 段最末的式子), 有

$$\sum_{\delta \in \Delta} \mathcal{W}_{E_\delta}(\mu: \mu(A) > 0) < \infty,$$

于是必有

$$c = \sup_{\delta \in \Delta} E_\delta(\mu: \mu(A) > 0) < \infty,$$

事实上, 如果上式不成立, 则有  $\Delta$  的子集  $\Delta'$  使对每个  $\delta \in \Delta'$ , 都有  $(1 - e^{-E_\delta(\mu: \mu(A) > 0)}) > \varepsilon$ , 其中  $\varepsilon$  是某个正数. 这样一来级数  $\sum_{\delta \in \Delta} \mathcal{W}_{E_\delta}(\mu: \mu(A) > 0)$  就不收敛了.

因此我们有

$$\sum_{\delta \in \Delta} E_\delta(\mu: \mu(A) > 0) e^{-\theta_\delta E_\delta(\mu: \mu(A) > 0)} \geq e^{-c} \sum_{\delta \in \Delta} E_\delta(\mu: \mu(A) > 0),$$

从而得到

$$\sum_{\delta \in \Delta} E_\delta(\mu: \mu(A) > 0) = \left( \sum_{\delta \in \Delta} E_\delta \right) (\mu: \mu(A) > 0) < \infty, \text{ 即 } \sum_{\delta \in \Delta} E_\delta \in \mathcal{S}_\infty.$$

反之, 如果  $\sum_{\delta \in \Delta} E_\delta \in \mathcal{S}_\infty$ , 将上面的步骤倒推可知  $\sum_{\delta \in \Delta} \mathcal{W}_{E_\delta}(\mu: \mu(A) > 0)$  对任意的  $A \in \mathcal{A}$

收敛, 故  $\ast_{\sigma \in \Delta} \mathscr{D}_{\sigma}$  存在。 证毕。

由这个引理, 我们可以将  $\mathscr{D}_x$  型分布的定义推广如下。

**28. 定义** 设  $E \in \mathscr{E}_\infty$ , 由于  $E$  总是  $\sigma$  有限的, 故存在  $E_n \in \mathscr{E}'_+$ ,  $n=1, 2, \dots$ , 使  $E = \sum_n E_n$ 。这时 由引理 27,  $\ast_{n \in \mathbb{N}} \mathscr{D}_{E_n}$  存在, 我们仍记之为

$$\mathscr{D}_E = \ast_{n \in \mathbb{N}} \mathscr{D}_{E_n},$$

并称之为广义  $\mathscr{D}_x$  型分布。

然而上述定义存在一个问题, 当  $E \in \mathscr{E}_\infty$  时, 表达式  $E = \sum_n E_n$ ,  $E_n \in \mathscr{E}'_+$  一般并不唯一。

假若  $E$  还可表为  $E = \sum_n F_n$ ,  $F_n \in \mathscr{E}'_+$ , 为使上述定义是不含混的, 必须证明,

$$\ast_{n \in \mathbb{N}} \mathscr{D}_{E_n} = \ast_{n \in \mathbb{N}} \mathscr{D}_{F_n}.$$

下面的引理指出, 我们的定义是合理的。

**29. 引理** 设  $E \in \mathscr{E}_\infty$  可表为

$$E = \sum_n E_n = \sum_n F_n,$$

其中  $E_n, F_n \in \mathscr{E}'_+$ ,  $n=1, 2, \dots$ 。则

$$\ast_{n \in \mathbb{N}} \mathscr{D}_{E_n} = \ast_{n \in \mathbb{N}} \mathscr{D}_{F_n}.$$

**证明** 首先假定  $E \in \mathscr{E}'_+$ 。在此假定之下

$$\left\| E - \sum_{i=1}^n E_i \right\| = \left\| \sum_{i=n+1}^\infty E_i \right\| = E(N - \sum_{i=1}^n E_i(N)),$$

因此

$$\left\| E - \sum_{i=1}^n E_i \right\| \longrightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty,$$

由定理 19, 有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\| \ast_{i=1}^n \mathscr{D}_{E_i} - \mathscr{D}_E \right\| = 0,$$

另一方面, 由于

$$\begin{aligned} \left\| \ast_{i=1}^n \mathscr{D}_{E_i} - \ast_{i=1}^n \mathscr{D}_{F_i} \right\| &= \left\| \left( \ast_{i=1}^n \mathscr{D}_{E_i} \right) \ast \left( \ast_{i=n+1}^\infty \mathscr{D}_{F_i} \right) - \ast_{i=1}^n \mathscr{D}_{F_i} \right\| \\ &\leq \left\| \ast_{i=n+1}^\infty \mathscr{D}_{F_i} - \delta_0 \right\| \leq 2 \ast_{i=n+1}^\infty \mathscr{D}_{F_i} \quad (\mu: \mu \neq 0) \end{aligned}$$

$$\leq 2 \sum_{i=n+1}^{\infty} \mathcal{E}_{F_i} (\mu: \mu \neq 0) \leq 2 \sum_{i=n+1}^{\infty} (1 - e^{-E_i(N)}),$$

并且因为  $E\mathcal{E}'_n$ ,  $\sum_{i=1}^{\infty} E_i(N) = E(N) < +\infty$ , 有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=n+1}^{\infty} (1 - e^{-E_i(N)}) = 0,$$

所以

$$\left\| \sum_{i=1}^n \mathcal{E}'_{F_i} - \sum_{i=1}^n \mathcal{E}'_{F_i} \right\| \longrightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty,$$

从而得到

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{i=1}^n \mathcal{E}'_{F_i} - \mathcal{E}'_N \right\| &\leq \left\| \sum_{i=1}^n \mathcal{E}'_{F_i} - \sum_{i=1}^n \mathcal{E}'_{F_i} \right\| \\ &+ \left\| \sum_{i=1}^n \mathcal{E}'_{F_i} - \mathcal{E}'_N \right\| \longrightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty, \end{aligned}$$

于是

$$\mathcal{E}'_N = \sum_{i=1}^{\infty} \mathcal{E}'_{F_i},$$

类似可得

$$\mathcal{E}'_N = \sum_{i=1}^{\infty} \mathcal{E}'_{F_i},$$

所以当  $\sum_{i=1}^{\infty} E_i = \sum_{i=1}^{\infty} F_i = E\mathcal{E}'_n$  时引理获证.

现设  $E \in \mathcal{E}_\infty$ , 由于  $E$  是  $\sigma$  有限的, 故存在  $\mathbb{N}$  中互不相交的集列  $Y_n$  使

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} Y_n = N, \quad E(Y_n) < \infty, \quad n = 1, 2, \dots$$

由引理的假定知道对每个  $n$ , 有

$$\sum_{i=1}^{\infty} E_i((\cdot) \cap Y_n) = E((\cdot) \cap Y_n) = \sum_{i=1}^{\infty} F_i((\cdot) \cap Y_n),$$

前面已证得

$$\sum_{i=1}^{\infty} \mathcal{E}'_{F_i}((\cdot) \cap Y_n) = \mathcal{E}'_N((\cdot) \cap Y_n) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathcal{E}'_{F_i}((\cdot) \cap Y_n),$$

然而由引理25的3)得到

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{\infty} \mathcal{E}'_{F_i} &= \sum_{i=1}^{\infty} \left( \sum_{n=1}^{\infty} \mathcal{E}'_{F_i}((\cdot) \cap Y_n) \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \left( \sum_{i=1}^{\infty} \mathcal{E}'_{F_i}((\cdot) \cap Y_n) \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathcal{E}'_N((\cdot) \cap Y_n) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \left( \sum_{i=1}^{\infty} \mathcal{E}'_{F_i}((\cdot) \cap Y_n) \right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathcal{E}'_{F_i}, \end{aligned}$$

引理证毕。

30. 引理 如果对于每一  $\delta \in \Delta, E_\delta \in \mathcal{E}_m$ , 则无穷卷积  $\ast_{\delta \in \Delta} \mathcal{W}_{E_\delta}$  存在, 当且仅当  $\sum_{\delta \in \Delta} E_\delta = E \in \mathcal{E}_m$ . 这时

$$\ast_{\delta \in \Delta} \mathcal{W}_{E_\delta} = \mathcal{W}_E.$$

证明 对于每个  $\delta \in \Delta$ , 由于  $E_\delta$  是  $\sigma$  有限的, 故存在指标集  $J_\delta$  (有限或可数无穷), 以及  $E_\delta, E_{\delta_j}, \delta_j \in J_\delta$ , 使  $\sum_{j \in J_\delta} E_{\delta_j} = E_\delta$ . 从而有

$$\ast_{\delta \in \Delta} \mathcal{W}_{E_\delta} = \ast_{\delta \in \Delta} (\ast_{j \in J_\delta} \mathcal{W}_{E_{\delta_j}}),$$

由引理27, 上式右边卷积存在当且仅当

$$\sum_{\delta \in \Delta} \sum_{j \in J_\delta} E_{\delta_j} \in \mathcal{E}_m,$$

由引理29, 有

$$\ast_{\delta \in \Delta} \mathcal{W}_{E_\delta} = \ast_{\delta \in \Delta} (\ast_{j \in J_\delta} \mathcal{W}_{E_{\delta_j}}) = \mathcal{W}_E.$$

31. 定理 广义  $\mathcal{W}_E$  型分布的性质. 下面设  $E \in \mathcal{E}_m, A, A_1, A_2, \dots, A_m \in \mathcal{A}$ , 则

1)  $\mathcal{W}_{\mathcal{W}_E}(f) = \exp(-\int (1-e^{-\mu f})E(d\mu)), \quad \forall f \in \mathcal{F}_m;$

2)  $A(\mathcal{W}_E) = \mathcal{W}_{A(E)}((\cdot) \setminus \{0\});$

3)  $\mathcal{W}_E(\mu: \mu(A) < \infty) = 1$  当且仅当  $E(\mu: \mu(A) > 0) < \infty$ , 以及  $E(\mu: \mu(A) = \infty) = 0$ ;

4)  $(\mathcal{W}_E)_{A_1, \dots, A_m}$  存在当且仅当  $E_{A_1, \dots, A_m}((\cdot) \setminus \{0\})$  存在且有限, 这时

$$(\mathcal{W}_E)_{A_1, \dots, A_m} = \mathcal{W}_{(E_{A_1, \dots, A_m})((\cdot) \setminus \{0\})};$$

5)  $\mathcal{W}_E(\mu: \mu(A) = 0) = \exp(-E(\mu: \mu(A) > 0));$

6)  $I_{\mathcal{W}_E} = I_E, \quad I_{\mathcal{W}_E}^{(2)} = I_E^{(2)} + I_E \times I_E$ , 这里  $I$  表示一阶矩测度,  $I^{(2)}$  表示二阶矩测度;

7)  $\mathcal{W}_E$  是简单的, 当且仅当  $E$  是连续的和简单的;

8)  $\mathcal{W}_E$  是无后效的, 当且仅当

$$E(\mu: \mu \text{ 不是 } n\delta_a \text{ 形式, } a \in \mathbb{X}, n = 0, 1, 2, \dots) = 0.$$

证明 1) 设  $E = \sum_{\delta \in \Delta} E_\delta, E_\delta \in \mathcal{E}_m$ , 由引理25的1)得

$$\begin{aligned} \mathcal{W}_{\mathcal{W}_E}(f) &= \prod_{\delta \in \Delta} \mathcal{W}_{E_\delta}(f) = \prod_{\delta \in \Delta} \exp(-\int (1-e^{-\mu f})E_\delta(d\mu)) \\ &= \exp(-\sum_{\delta \in \Delta} \int (1-e^{-\mu f})E_\delta(d\mu)) = \exp(-\int (1-e^{-\mu f})E(d\mu)). \end{aligned}$$

2) 仍设  $E = \sum_{\delta \in \Delta} E_\delta, E_\delta \in \mathcal{E}_m$ , 则

$$\Delta(\mathcal{W}_X) = \Delta(*_{\mathcal{W}_X} \mathcal{W}_X) = *_{\mathcal{W}_X} (\Delta \mathcal{W}_X) = *_{\mathcal{W}_X} \mathcal{W}_X \Delta((\cdot) \setminus \{0\}) = \mathcal{W}_X(\Delta X)((\cdot) \setminus \{0\}).$$

3) 充分性 假定  $E(\mu: \mu(A) > 0) < \infty$ ,  $E(\mu: \mu(A) = \infty) = 0$ , 则由2) 及  $E(\{0\}) = 0$  有

$$\begin{aligned} (\mathcal{W}_X)(\mu: \mu(A) < \infty) &= (\Delta \mathcal{W}_X)(\mu: \mu \text{ 为有限测度}) \\ &= e^{-E(\{0\} \setminus \mu(A) > 0)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \{E(\mu: \mu(A) > 0)\}^n = 1. \end{aligned}$$

必要性 如果  $E \in \mathcal{E}$ , 并且  $\mathcal{W}_X(\mu: \mu(A) < \infty) = 1$ , 则  
 $(\Delta \mathcal{W}_X)(\mu: \mu \text{ 为有限测度}) = 1$ ,

所以

$$\begin{aligned} 1 &= (\Delta \mathcal{W}_X)(\mu: \mu \text{ 为有限测度}) = e^{-E(\{0\} \setminus \mu(A) > 0)} \\ &\quad \times \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (E(\mu: 0 < \mu(A) < \infty))^n \\ &= e^{-E(\{0\} \setminus \mu(A) > 0)} e^{E(\{0\} \setminus 0 < \mu(A) < \infty)}, \end{aligned}$$

从而  $E(\mu: \mu(A) = \infty) = 0$ .

4) 如果  $(\mathcal{W}_X)_{A_1, \dots, A_m}$  存在, 即  $(\mathcal{W}_X)(\mu: \mu(\bigcup_{i=1}^m A_i) < \infty) = 1$ . 由3), 这等价于  
 $E(\mu: \mu(\bigcup_{i=1}^m A_i) = \infty) = 0$  及  $E(\mu: \mu(\bigcup_{i=1}^m A_i) > 0) < \infty$ , 而这等价于  $E_{A_1, \dots, A_m}$  存在且  
 $E_{A_1, \dots, A_m}$  有限.

现记  $A = \bigcup_{i=1}^m A_i$ , 则

$$\begin{aligned} (\mathcal{W}_X)_{A_1, \dots, A_m} &= \Delta(\mathcal{W}_X)_{A_1, \dots, A_m} = (\mathcal{W}(\Delta X))_{A_1, \dots, A_m} \\ &= (\mathcal{W}(\Delta X)((\cdot) \setminus \{0\}))_{A_1, \dots, A_m} = \mathcal{W}(\Delta X)_{A_1, \dots, A_m}((\cdot) \setminus \{0\}) \\ &= \mathcal{W}_{\Delta X, A_1, \dots, A_m}((\cdot) \setminus \{0\}). \end{aligned}$$

5) 设  $A_n \uparrow A$ ,  $A_n \in \mathcal{A}$ , 则

$$\begin{aligned} \mathcal{W}_X(\mu: \mu(A) = 0) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{W}_X(\mu: \mu(A_n) = 0) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \exp(-E(\mu: \mu(A_n) > 0)) \\ &= \exp(-E(\mu: \mu(A) > 0)). \end{aligned}$$

6) 设  $A_n \uparrow X$ ,  $A_n \in \mathcal{A}$ , 由

$$I_{(\Delta X) \mathcal{W}_X} = I_{(\Delta X)}$$

取极限即得  $I_{\mathcal{W}_X} = I_{X, 2}$  二阶矩测度的式子类似可得.

7)、8) 与通常  $\mathcal{W}_X$  型分布的证明类似 (见定理 I. 63 及 I. 65).



## §5. 无穷可分分布的刻画(二)

32. 在 §2 定理11证明了, 当  $P \in \mathcal{S}_N$  时, 如果  $P$  是无穷可分的并且  $P(\{0\}) > 0$ , 那么  $P$  一定是  $\mathcal{W}_N$  型分布. 根据引理10, 如果  $P(\{0\}) = 0$ , 即当  $E \in \mathcal{S}'_N$  时, 满足  $P = \mathcal{W}_N$  的  $E$  是唯一的. 因此下述的两个集合:

$$\{P_1 \in \mathcal{S}_{IN}, P(\{0\}) > 0\} \text{ 和 } \{\mathcal{W}_N \in \mathcal{S}'_N\}$$

是相同的集合. 我们将证明: 全体无穷可分分布与全体广义  $\mathcal{W}_N$  型分布也是相同的集合, 即,

$$\{P_1 \in \mathcal{S}_{IN}\} = \{\mathcal{W}_N \in \mathcal{S}'_N\}.$$

先证明一个引理.

33. 引理 设给定了满足如下条件的测度族  $\{E^A, A \in \mathcal{A}\}$ :

- 1) 当  $A \in \mathcal{A}$  固定时,  $E^A(\cdot)$  是  $\sigma$  代数  $\mathcal{N}$  上的有限测度, 其中  $C \in \mathcal{A}$  任意;
- 2)  $E^A(\mu_1 \mu(A) = 0) = 0$ ,  $A \in \mathcal{A}$  任意;
- 3) 当  $B \subset A$  时, 对任意的  $Y \in \bigcup_{C \in \mathcal{A}} \mathcal{N}$  有

$$E^B(Y) = E^A(Y \cap (\mu_1 \mu(B) > 0)),$$

则存在  $\mathcal{N}$  上的唯一测度  $E \in \mathcal{S}_N$ , 满足: 对任意的  $A \in \mathcal{A}$  有

$$E(Y \cap (\mu_1 \mu(A) > 0)) = E^A(Y), \quad \forall Y \in \mathcal{N}.$$

证明 显然,  $\bigcup_{C \in \mathcal{A}} \mathcal{N}$  是  $\mathcal{N}$  的一个子代数, 而且  $\sigma(\bigcup_{C \in \mathcal{A}} \mathcal{N}) = \mathcal{N}$ . 固定  $B \in \mathcal{A}$ , 由于  $E^B$  是  $\mathcal{N}$  上的有限测度, 所以它是代数  $\bigcup_{C \in \mathcal{A}} \mathcal{N}$  上的有限可加测度. 现在我们将它扩张为  $\mathcal{N}$  上的测度. 如果  $E^B(\mathcal{N}) = 0$ , 这个扩张是平凡的, 我们可以令  $E^B(Y) = 0$ ,  $\forall Y \in \mathcal{N}$ .

现设  $E^B(\mathcal{N}) > 0$ , 首先假定  $E^B(\mathcal{N}) = 1$ .

设有互不相交的  $A_1, \dots, A_m \in \mathcal{A}$ , 令  $A = \bigcup_{i=1}^m A_i$ . 由于  $E^B$  是  $\mathcal{N}$  上的有限测度并且  $E^B(\mathcal{N})$

$= 1$ , 所以  $(E^B)_{A_1, \dots, A_m}$  是  $Z^m$  上的概率分布. 如此得到的概率分布族:

$$\{(E^B)_{A_1, \dots, A_m}; A_1, \dots, A_m \in \mathcal{A} \text{ 且互不相交}\}$$

满足定理 I. 13 中条件 1)~4), 于是存在  $(\mathcal{N}, \mathcal{N})$  上的分布  $G^B$ , 使得对任意互不相交的  $A_1, \dots, A_m$  有

$$G^B_{A_1, \dots, A_m} = (E^B)_{A_1, \dots, A_m}$$

显然  $G^B$  确是  $\bigcup_{C \in \mathcal{A}} \mathcal{N}$  上的有限可加测度  $E^B$  的扩张.

上面假定了  $E^B(\mathcal{N}) = 1$ , 如果  $E^B(\mathcal{N}) \neq 1$ , 则先以  $(E^B(\mathcal{N}))^{-1} E^B$  取代  $E^B$ , 按上面的方法

扩张以后再以  $E^j(N)$  乘之, 所得到的扩张仍记为  $G^j$ .

现任取  $X$  中某一点, 以  $S_k$  记以此点为中心半径为  $k$  的圆,  $k=1, 2, \dots$ . 又设对每一  $k$ , 都已按上面的方法作好了  $E^k$  的扩张  $G^k$ . 因为当  $k < j$  时, 对于任意的  $A \in \mathcal{S}$  及  $Y \in \mathcal{N}$ , 有

$$\begin{aligned} G^j(Y) &\geq G^j(Y \cap (\mu_1 \mu(S_k) > 0)) \\ &= E^j(Y \cap (\mu_1 \mu(S_k) > 0)) = E^k(Y) = G^k(Y). \end{aligned}$$

故若令  $E = \sup_k G^k$ , 则  $E$  是  $(N, \mathcal{N})$  上的测度. 又由条件 2) 知

$$E(\{0\}) \leq \sup_k G^k(\mu_1 \mu(S_k) = 0) = \sup_k E^k(\mu_1 \mu(S_k) = 0) = 0,$$

又因为对任意的  $A \in \mathcal{S}$  及  $Y \in \mathcal{N}$  有

$$E(Y \cap (\mu_1 \mu(S_j) > 0)) = G^j(Y) = E^j(Y),$$

取  $Y = N$  得  $E(\mu_1 \mu(S_j) > 0) = E^j(N) < \infty$ . 这说明  $E \in \mathcal{S}_\infty$ . 最后, 设  $A \in \mathcal{S}$ , 取  $S_j \supset A$ , 由条件 3) 得知, 对任意的  $Y \in \mathcal{N}$  有

$$\begin{aligned} E(Y \cap (\mu_1 \mu(A) > 0)) &= G^j(Y \cap (\mu_1 \mu(A) > 0)) \\ &= E^j(Y \cap (\mu_1 \mu(A) > 0)) = E^j(Y), \text{ 引理证毕.} \end{aligned}$$

下面的定理完满地回答了本节开首提出的问题.

**24. 定理** 设  $P \in \mathcal{S}_H$ , 则  $P \in \mathcal{S}_{IH}$  的充分必要条件是:

$$P = \mathcal{S}_2, E \in \mathcal{S}_\infty$$

$\mathcal{S}_\infty$  到  $\mathcal{S}_{IH}$  的映像  $E \cap \mathcal{S}_2$  是一一的而且是满射的.

**证明** 充分性 设  $E \in \mathcal{S}_\infty$ , 则存在  $B \in \mathcal{S}'$ ,  $\delta \in \Delta$ , 使得  $\mathcal{S}_2 = *_{\delta \in \Delta} \mathcal{S}_{B\delta}$ . 于是对于任意的  $n =$

$1, 2, \dots$ , 有

$$\mathcal{S}_2 = *_{\delta \in \Delta} (\mathcal{S}_{(B\delta/n)})^n = (\mathcal{S}_{(B/n)})^n,$$

所以  $\mathcal{S}_2$  是无穷可分的.

**必要性** 设  $P$  是无穷可分分布, 我们要证明: 存在  $B \in \mathcal{S}_\infty$ , 使  $P = \mathcal{S}_2$ . 固定  $B \in \mathcal{S}$ , 由  $P$  的无穷可分性可推出  ${}_BP$  的无穷可分性. 又因为

$$({}_BP)(\mu_1 \mu(X) < \infty) = P(\mu_1 \mu(B) < \infty) = 1,$$

所以由推论 13 可知, 存在  $B^0 \in \mathcal{S}$ , 使

$${}_BP = \mathcal{S}_{(B^0)} = \mathcal{S}_{(B^0)}(\{0\} \setminus \{0\}),$$

如果  $A \in \mathcal{S}$  并且  $A \supset B$ , 因为

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_{(B^0)}(\{0\} \setminus \{0\}) &= {}_BP = {}_A({}_BP) = {}_A(\mathcal{S}_{B^0}) \\ &= \mathcal{S}_{(B^0 A)} = \mathcal{S}_{(B^0 A)}(\{0\} \setminus \{0\}), \end{aligned}$$

所以

$$E(\{0\} \setminus \{0\}) = ({}_BP^A)(\{0\} \setminus \{0\}),$$

因此如果命

$$E^P(Y) = E^A(Y \cap (\mu_1 \mu(B) > 0)), \quad \forall Y \in \mathcal{N}, B \in \mathcal{A}_1$$

则  $\{P^a: B \in \mathcal{B}\}$  满足引理 33 的全部条件。于是存在  $B \in \mathcal{B}_\infty$  使对任意  $A \in \mathcal{B}$  及  $Y \in \mathcal{N}$  有

$$E(Y \cap (\mu_1 \mu(A) > 0)) = E^A(Y),$$

根据前面已证的充分性,  $\mathcal{B}_\infty$  是无穷可分的, 又因为

$$({}_A E)((\cdot) \setminus \{0\}) = E^A((\cdot) \setminus \{0\}), \quad \forall A \in \mathcal{B},$$

可知

$${}_A P = \mathcal{B}^A((\cdot) \setminus \{0\}) = \mathcal{B}^A((\cdot) \setminus \{0\}) = \mathcal{B}^A((\cdot) \setminus \{0\}) = \mathcal{B}^A((\cdot) \setminus \{0\}), \quad \forall A \in \mathcal{B},$$

于是  $P = \mathcal{B}_\infty$ .

为完成定理的证明, 尚需证: 对任意的  $B, F \in \mathcal{B}_\infty$ , 如果  $\mathcal{B}_\infty = \mathcal{B}_\infty$ , 则有  $B = F$ . 实际上, 当  $\mathcal{B}_\infty = \mathcal{B}_\infty$  时, 由于

$$\mathcal{B}^A((\cdot) \setminus \{0\}) = \mathcal{B}^A((\cdot) \setminus \{0\}) = \mathcal{B}^A((\cdot) \setminus \{0\}) = \mathcal{B}^A((\cdot) \setminus \{0\}),$$

可推知

$${}_A E((\cdot) \setminus \{0\}) = {}_A F((\cdot) \setminus \{0\}), \quad \forall A \in \mathcal{B},$$

由此易得到, 对于任意的  $Y \in \bigcup_{A \in \mathcal{B}} \mathcal{N}$  及任意的  $A \in \mathcal{B}$ , 有

$$E(Y \cap (\mu_1 \mu(A) > 0)) = F(Y \cap (\mu_1 \mu(A) > 0)),$$

由于  $\bigcup_{A \in \mathcal{B}} \mathcal{N}$  是代数并且产生  $\sigma$ -代数  $\mathcal{N}$ , 所以上式对一切  $Y \in \mathcal{N}$  及  $A \in \mathcal{B}$  都成立.

取  $A_n \in \mathcal{B}$ ,  $A_n \uparrow X$ , 并注意到  $E(\{0\}) = F(\{0\}) = 0$ , 可得

$$E(Y) = \lim_{n \rightarrow \infty} E(Y \cap (\mu_1 \mu(A_n) > 0)) = \lim_{n \rightarrow \infty} F(Y \cap (\mu_1 \mu(A_n) > 0)) = F(Y),$$

这说明  $B = F$ . 定理证毕.

**35. 定义** 根据上面的定理,  $E \sim \mathcal{B}_\infty$  是  $\mathcal{B}_\infty$  到  $\mathcal{P}_{IN}$  上的一一映像. 当  $P = \mathcal{B}_\infty$  时, 我们称  $E$  是  $P$  的典则测度, 并记为  $\bar{P}$ .

我们可以将定理 31 中关于广义  $\mathcal{B}_\infty$  型分布的性质改述如下.

设  $P \in \mathcal{P}_{IN}$ ,  $A, A_1, \dots, A_m \in \mathcal{B}$ , 则

$$1) \mathcal{B}_P(f) = \exp\left[-\int (1 - e^{-tf}) \bar{P}(d\mu)\right], \quad f \in \mathcal{F}_{m+1}$$

$$2) ({}_A \bar{P}) = {}_A(\bar{P}),$$

$$3) P(\mu_1 \mu(A) < \infty) = 1 \text{ 当且仅当 } \bar{P}(\mu_1 \mu(A) > 0) < \infty, \quad \bar{P}(\mu_1 \mu(A) = \infty) = 0,$$

$$4) P_{A_1, \dots, A_m} \text{ 存在当且仅当 } \bar{P}_{A_1, \dots, A_m} \text{ 存在且有限. 这时}$$

$$(\bar{P}_{A_1, \dots, A_m}) = (\bar{P})_{A_1, \dots, A_m}((\cdot) \setminus \{0\}),$$

$$5) P(\mu_1 \mu(A) = 0) = \exp(-\bar{P}(\mu_1 \mu(A) > 0)).$$

## § 6. Poisson 过程

**36. 定义** 设  $P$  是无穷可分分布, 满足

$$\bar{P}(\mu_1 \mu(X) \neq 1) = 0,$$

则称 $P$ 是Poisson 分布. 具有Poisson 分布的点过程称为Poisson 过程.

因为映像 $g: \mathscr{A} \rightarrow \mathscr{B}_N$ 是从 $(X; \mathscr{A})$ 到 $(N; \mathscr{B})$ 内的可测映像, 所以对任意的 $\lambda \in M$ , 如果

$$Q_\lambda(\cdot) = \lambda g^{-1}(\cdot),$$

则 $Q_\lambda$ 是 $(N, \mathscr{B})$ 上的测度.

37. 引理 设 $E \in \mathscr{E}_N$  且  $E(\mu; \mu(X) \neq 1) = 0$ , 则 存在唯一的 $\lambda \in M$ 使 $E = Q_\lambda$ ; 反之, 设 $\lambda \in M$ , 则 $Q_\lambda \in \mathscr{E}_N$  并且  $Q_\lambda(\mu; \mu(X) \neq 1) = 0$ .

证明 设 $E \in \mathscr{E}_N$ ,  $E(\mu; \mu(X) \neq 1) = 0$ . 命

$$\lambda(A) = E(\mu; \mu = \delta_a, a \in A), A \in \mathscr{A},$$

则如此定义的 $\lambda$ 显然属于 $M$ , 并且  $Q_\lambda = E$ .

反之, 设 $\lambda \in M$ , 则对任意的 $A \in \mathscr{A}$ 有

$$Q_\lambda(\mu; \mu(A) > 0) = \lambda(a; a \in X, \delta_a(A) > 0) = \lambda(A) < \infty,$$

又因为

$$Q_\lambda(\{0\}) = Q_\lambda(\mu; \mu(X) = 0) = \lambda(a; a \in X, \delta_a(X) = 0) = \lambda(\phi) = 0,$$

所以 $Q_\lambda \in \mathscr{E}_N$  并且

$$Q_\lambda(\mu; \mu(X) \neq 1) = \lambda(a; a \in X, \delta_a(X) \neq 1) = \lambda(\phi) = 0.$$

证毕.

下面两个定理可以看作是Poisson 过程的等价定义.

38. 定理 设  $P \in \mathscr{P}_N$ ,  $P$  是 Poisson 分布的充要条件是: 存在 $\lambda \in M$ , 使  $P = \mathscr{P}(\varphi_\lambda)((\cdot) \setminus \{0\})$

证明 设 $P \in \mathscr{P}_N$ 是Poisson分布, 由定义知 $P$ 是无穷可分的且 $P(\mu; \mu(X) \neq 1) = 0$ . 再由引理37知道存在 $\lambda \in M$ , 使 $P = Q_\lambda$ .

反之, 如果 $P = \mathscr{P}(\varphi_\lambda)$ , 则 $P$ 是无穷可分的, 而且由引理37知 $Q_\lambda = P$ 满足 $P(\mu; \mu(X) \neq 1) = 0$ , 所以 $P$ 是Poisson分布.

39. 定理 设 $P \in \mathscr{P}_N$ , 则 $P$ 是Poisson分布的充分必要条件是:  $P$ 是无后效的, 并且存在 $\lambda \in M$ 使得对于任意的 $A \in \mathscr{A}$ 及任意的非负整数 $h$ 有

$$P(\mu; \mu(A) = h) = \frac{1}{h!} e^{-\lambda(A)} (\lambda(A))^h.$$

证明 设 $P$ 是Poisson分布, 由定义30及定理31的8)可知 $P$ 是无后效的. 再由定理38, 知 $P = \mathscr{P}(\varphi_\lambda)$ , 其中 $\lambda \in M$ .

对于固定的 $A \in \mathscr{A}$ ,  $(Q_\lambda)_A$ 是 $Z_A$ 上的测度. 由于对任意的 $h \in Z_A$ 有

$$\begin{aligned} (Q_\lambda)_A(h \setminus \{0\}) &= Q_\lambda(\mu; \mu(A) = h, \mu(A) \neq 0) \\ &= \lambda(a; a \in X, \delta_a(A) = h, \delta_a(A) \neq 0) = \lambda(A) \delta_1(h) \end{aligned}$$

所以

$$(Q_\lambda)_A(h \setminus \{0\}) = \lambda(A) \delta_1(h).$$

这里 $\delta_1$ 是 $Z_A$ 上的测度, 满足 $\delta_1(1) = 1$ ,  $\delta_1(h) = 0 (h \neq 1)$ . 从而由 $P = \mathscr{P}(\varphi_\lambda)$ 推知

$$\begin{aligned}
P_A &= (\mathcal{W}_{O_A})_A = \mathcal{W}_{O_A}((\cdot) \setminus \{0\}) \\
&= e^{-\lambda(A)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} ((Q_A)_A((\cdot) \setminus \{0\})) = e^{-\lambda(A)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (\lambda(A) \delta_1)^n \\
&= e^{-\lambda(A)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (\lambda(A))^n \delta_n,
\end{aligned}$$

因此对任意的  $h \in \mathbb{Z}_+$  有,

$$\begin{aligned}
P(\mu(A) = h) &= P_A(h) \\
&= e^{-\lambda(A)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (\lambda(A))^n \delta_n(h) = e^{-\lambda(A)} \frac{1}{h!} (\lambda(A))^h.
\end{aligned}$$

反之, 如果  $P$  无后效并且存在  $\lambda \in M$  使

$$P(\mu(A) = h) = \frac{1}{h!} e^{-\lambda(A)} (\lambda(A))^h,$$

对一切  $A \in \mathcal{A}$  及  $h \in \mathbb{Z}_+$  成立. 由无后效性, 对于互不相交的  $A_1, \dots, A_m \in \mathcal{A}$  及  $h_1, \dots, h_m \in \mathbb{Z}_+$  有

$$P(\mu(A_1) = h_1, \dots, \mu(A_m) = h_m) = \prod_{j=1}^m \frac{1}{(h_j)!} e^{-\lambda(A_j)} (\lambda(A_j))^{h_j}.$$

由前面第一部分的证明及  $\mathcal{W}_{O_A}$  的无后效性, 可知  $\mathcal{W}_{O_A}$  的有限维分布  $(\mathcal{W}_{O_A})_{A_1}, \dots, A_m$  也具有上面的形式, 从而推知  $P = \mathcal{W}_{O_A}$ , 即  $P$  是 Poisson 分布.

下面讨论 Poisson 分布的一些重要性质. 首先注意, 当  $\lambda \in M$  时, 对任意的  $A \in \mathcal{A}$  有

$$I_{O_A}(A) = \int \mu(A) Q_A(d\mu) = \int \delta_a(A) \lambda(da) = \lambda(A),$$

所以  $I_{O_A}(\cdot) = \lambda(\cdot)$ . 因此对于 Poisson 分布  $P = \mathcal{W}_{O_A}$ , 其强度测度就是  $\lambda$ . 为方便起见, 以后我们以  $P_\lambda$  表示以  $\lambda$  为强度测度的 Poisson 分布, 即  $P_\lambda = \mathcal{W}_{O_\lambda}$ .

**40. 定理** Poisson 分布  $P_\lambda$  是简单的, 当且仅当  $\lambda$  是扩散的, 即对任意的  $a \in X$ ,  $\lambda(a) = 0$ .

**证明** 由定理 31 的 7), 分布  $P_\lambda = \mathcal{W}_{O_\lambda}$  是简单的, 当且仅当  $Q_\lambda$  是简单的和连续的. 但  $Q_\lambda$  总是简单的, 所以  $P_\lambda$  是简单的, 当且仅当  $Q_\lambda$  是连续的. 然而  $Q_\lambda$  的连续等价于对任意的  $a \in X$ ,  $I_{O_\lambda}(a) = 0$ , 所以根据上面的注意, 得知  $P_\lambda$  的简单性等价于  $\lambda(a) = 0$  对一切  $a \in X$  成立.

**41. 定理** 设  $\lambda \in M$ , 并且  $\lambda(a) = 0$  对一切  $a \in X$  成立, 则恰好存在一个分布  $P \in \mathcal{P}_N$ , 使对任意的  $A \in \mathcal{A}$  及任意的  $h \in \mathbb{Z}_+$ , 有

$$P_A(h) = P(\mu(A) = h) = \frac{1}{h!} e^{-\lambda(A)} (\lambda(A))^h,$$

此时  $P = P_\lambda$ .

**证明** 由定理 40,  $P_\lambda$  是简单的, 现设  $P$  是  $N$  上的任意一个分布, 满足

$$P_A(h) = \frac{1}{h!} e^{-\lambda(A)} (\lambda(A))^h = (P_\lambda)_A(h),$$

由定理 I.24 知有  $P = P_\lambda$ .

由此结果直接推出:

**42. 推论** 如果  $P \in \mathcal{P}_N$  是连续分布, 则  $P$  是 Poisson 分布的充要条件为: 存在  $\lambda \in M$ , 使对任意的  $A \in \mathcal{A}$ ,  $P_A$  具有参数为  $\lambda(A)$  的一维 Poisson 分布.

**证明** 由条件可知  $I_P(\cdot) = \lambda(\cdot)$ . 由于  $P$  是连续的, 所以  $I_P = \lambda$  是扩散的, 应用定理 41 即得欲证.

上面的定理 40~42 指出, 下述三命题等价:

1)  $P$  是简单的 Poisson 分布;  
2)  $P$  的强度测度  $I_P$  是扩散的, 并且一维分布  $P_A$  是  $Z_+$  上以  $I_P(A)$  为参数的 Poisson 分布;

3)  $P$  是连续分布, 它的一维分布  $P_A$  是  $Z_+$  上以  $I_P(A)$  为参数的 Poisson 分布.

在 2) (或 3)) 中, 去掉  $I_P$  为扩散 (或  $P$  为连续) 的条件,  $P$  就不一定是 Poisson 分布. 很容易构造出这种例子.

**43. 定理** 设  $\lambda \in M$ , 则  $P_\lambda$  的 Laplace 变换为:

$$\mathcal{W}_{P_\lambda}(f) = \exp \left\{ - \int (1 - e^{-f(a)}) \lambda(da) \right\}, \quad f \in \mathcal{F}_{m+}.$$

**证明** 由定理 31 的 1) 得

$$\mathcal{W}_{P_\lambda}(f) = \exp \left\{ - \int (1 - e^{-f}) Q_\lambda(d\mu) \right\} = \exp \left\{ - \int (1 - e^{-f(a)}) \lambda(da) \right\}.$$

**44. 定理** 对任意的  $c \in (0, 1]$  及  $\lambda \in M$ , 有

$$\mathcal{W}_{c(P_\lambda)} = P_{c\lambda}.$$

**证明** 利用引理 I.69 分别计算上式两边的有限维分布的概率母函数.

下面我们研究两个 Poisson 过程之间的相互绝对连续性与相互奇异性.

**45. 引理** 设  $\nu, \lambda$  是  $\mathcal{A}$  上的两个有限测度并且  $\nu \ll \lambda$ , 则  $P_\nu \ll P_\lambda$ . 如果  $f = \frac{d\nu}{d\lambda}$  是  $\nu$  相对于  $\lambda$  的 Radon-Nikodym 导数, 则  $P_\nu$  相对于  $P_\lambda$  的 Radon-Nikodym 导数  $T_{\nu, \lambda}(\mu) = \frac{dP_\nu}{dP_\lambda}(\mu)$  可以写为:

$$T_{\nu, \lambda}(\mu) = e^{\lambda(X) - \nu(X)} \prod_{a \in X, \mu(a) > 0} (f(a))^{\mu(a)}.$$

**证明** 设  $h(\mu)$  是定义于  $(N, N)$  上的有界可测函数, 由定理 38 得

$$\begin{aligned} \int h(\mu) P_\nu(d\mu) &= e^{-\nu(X)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \int h(\delta_{a_1} + \cdots + \delta_{a_k}) \nu(da_1) \cdots \nu(da_k) \\ &= e^{-\lambda(X)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \int e^{\lambda(X) - \nu(X)} h(\delta_{a_1} + \cdots + \delta_{a_k}) f(a_1) \cdots f(a_k) \lambda(da_1) \cdots \lambda(da_k) \\ &= \int h(\mu) T_{\nu, \lambda}(\mu) P_\lambda(d\mu), \end{aligned}$$

特别取  $h(\mu) = 1_X(\mu)$ ,  $\forall X \in N$ , 则

$$P_\nu(X) = \int_X T_{\nu, \lambda}(\mu) P_\lambda(d\mu),$$

这说明  $P_\nu \ll P_\lambda$  而且  $\frac{dP_\nu}{dP_\lambda} = T_{\nu, \lambda}$ .

46. 引理 设  $\nu, \lambda$  是  $\mathcal{A}$  上的有限测度, 则

$$K_\rho(P_\nu, P_\lambda) = \exp\left(-\frac{1}{2}(K_d(\nu, \lambda))^2\right),$$

此处  $K_\rho(\cdot, \cdot)$  及  $K_d(\cdot, \cdot)$  的定义见 I. 33.

证明 任取  $\mathcal{A}$  上的有限测度  $\gamma$  使  $\nu \ll \gamma, \lambda \ll \gamma$ . 又设  $\nu, \lambda$  相对于  $\gamma$  的 Radon-Nikodym 导数分别是  $f, g$ . 由引理 45 知

$$\begin{aligned} K_\rho(P_\nu, P_\lambda) &= \int \sqrt{T_{\nu, \gamma}(\mu) T_{\lambda, \gamma}(\mu)} P_\gamma(d\mu) \\ &= \exp\left(-\frac{1}{2}(\nu(X) + \lambda(X) - 2\gamma(X))\right) \times \int \prod_{\substack{a \in X \\ \mu(a) > 0}} (\sqrt{f(a)g(a)})^{\mu(a)} \mathcal{W}_{\gamma}(d\mu), \end{aligned}$$

命

$$h(\mu) = \prod_{\substack{a \in X \\ \mu(a) > 0}} (\sqrt{f(a)g(a)})^{\mu(a)},$$

则有

$$\begin{aligned} \int h(\mu) \mathcal{W}_{\gamma}(d\mu) &= \sum_{h=0}^{\infty} e^{-\gamma(X)} \frac{1}{h!} \int h(\mu) Q_{\gamma}^h(d\mu) \\ &= e^{-\gamma(X)} \sum_{h=0}^{\infty} \frac{1}{h!} \int h(\delta_{a_1} + \dots + \delta_{a_h}) \gamma(da_1) \dots \gamma(da_h) \\ &= e^{-\gamma(X)} \sum_{h=0}^{\infty} \frac{1}{h!} \int \sqrt{f(a_1) \dots f(a_h) g(a_1) \dots g(a_h)} \gamma(da_1) \dots \gamma(da_h) \\ &= e^{-\gamma(X)} \sum_{h=0}^{\infty} \frac{1}{h!} \left( \int \sqrt{f(a)g(a)} \gamma(da) \right)^h \\ &= \exp\left\{ \int (\sqrt{f(a)g(a)} - 1) \gamma(da) \right\}, \end{aligned}$$

从而

$$\begin{aligned} K_\rho(P_\nu, P_\lambda) &= \exp\left\{-\frac{1}{2} \int (f(a) - 2\sqrt{f(a)g(a)} + g(a)) \gamma(da)\right\} \\ &= \exp\left\{-\frac{1}{2} \int (\sqrt{f(a)} - \sqrt{g(a)})^2 \gamma(da)\right\} = \exp\left\{-\frac{1}{2}(K_d(\nu, \lambda))^2\right\}. \end{aligned}$$

现设  $\nu, \lambda \in \mathcal{M}$ , 则对任意  $A \in \mathcal{A}$ ,  $A\nu$  与  $A\lambda$  是有限测度, 于是  $K_d(A\nu, A\lambda)$  存在. 取  $A_n \in \mathcal{A}$ ,  $A_n \uparrow X$ , 我们定义

$$K_d(\nu, \lambda) = \lim_{n \rightarrow \infty} K_d(A_n\nu, A_n\lambda),$$

这样定义  $K_d(\nu, \lambda)$  的合理性是不成问题的. 当  $\gamma \in \mathcal{M}, \nu \ll \gamma, \lambda \ll \gamma$ , 而  $\frac{d\nu}{d\gamma} = f, \frac{d\lambda}{d\gamma} = g$  时,  $K_d(\nu, \lambda)$  又可表为

$$K_d(v, \lambda) = \left( \int (\sqrt{f(a)} - \sqrt{g(a)})^2 \nu(da) \right)^{\frac{1}{2}}.$$

47. 引理 设  $\nu, \lambda \in M$ , 则有

$$2\{1 - \exp(-\frac{1}{2}(K_d(v, \lambda))^2)\} \leq \|P_\nu - P_\lambda\|$$

$$\leq \sqrt{8\{1 - \exp(-\frac{1}{2}(K_d(v, \lambda))^2)\}}.$$

证明 由引理 I.34 及 I.35 推出:

$$(K_d(P_\nu, P_\lambda))^2 \leq \|P_\nu - P_\lambda\| \leq 2K_d(P_\nu, P_\lambda),$$

又因为

$$(K_d(P_\nu, P_\lambda))^2 = 2(1 - K_\rho(P_\nu, P_\lambda)),$$

于是当  $\nu, \lambda$  是有限测度时, 由引理 46 得到

$$2\{1 - \exp(-\frac{1}{2}(K_d(v, \lambda))^2)\} \leq \|P_\nu - P_\lambda\|$$

$$\leq \sqrt{8\{1 - \exp(-\frac{1}{2}(K_d(v, \lambda))^2)\}}.$$

现设  $\nu, \lambda \in M$ , 由定理 3 的 2), 对于  $A_n \in \mathcal{B}$ ,  $A_n \uparrow X$  有

$$\|P_\nu - P_\lambda\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \|A_n P_\nu - A_n P_\lambda\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \|P_{(A_n \nu)} - P_{(A_n \lambda)}\|$$

再根据  $L_d(v, \lambda) = \lim_{n \rightarrow \infty} K_d(A_n \nu, A_n \lambda)$  即得欲证之不等式。

48. 注记 根据引理 16, 当  $\nu, \lambda$  为有限测度时, 还可得到

$$\|P_\nu - P_\lambda\| = \|\mathcal{P}_{Q_\nu} - \mathcal{P}_{Q_\lambda}\| \leq 2\|Q_\nu - Q_\lambda\| = 2\|\nu - \lambda\|,$$

下面我们举例说明, 引理 47 比上述结果好得多。

设  $(X, \rho_X)$  是数直线,  $\nu$  是 Lebesgue 测度。命

$$\nu_n = \nu((\cdot) \cap [0, n]), \quad \lambda_n = (1 + n^{-1})\nu_n,$$

如果应用上面根据引理 16 导出的不等式, 则

$$\|P_{\nu_n} - P_{\lambda_n}\| \leq 2,$$

但如果应用引理 47, 则当  $n \rightarrow \infty$  时有

$$\|P_{\nu_n} - P_{\lambda_n}\| \leq \sqrt{8\{-\exp(-\frac{1}{2}\int_0^n (1 - \sqrt{1 + n^{-1}})^2 \nu(dx))\}} \rightarrow 0.$$

下述定理是 Kakutani 定理的一个直接应用, 是关于 Poisson 过程的一个重要结果。

49. 定理 设  $\nu, \lambda \in M$ , 则

- 1)  $P_\nu \perp P_\lambda$  当且仅当  $K_d(v, \lambda) = +\infty$ ,
- 2)  $P_\nu \ll P_\lambda$  当且仅当  $\nu \ll \lambda$  并且  $K_d(v, \lambda) < \infty$ ,
- 3)  $P_\nu \sim P_\lambda$  当且仅当  $\nu \sim \lambda$  并且  $K_d(v, \lambda) < \infty$ .

证明 设  $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$  是  $\mathcal{B}$  中一系列互不相交的集合, 满足  $\bigcup_n A_n = X$ . 命

$$\nu_n = A_n \nu, \quad \lambda_n = A_n \lambda,$$



又命

$$N_n = \{A_n \mu, \mu \in N\}, \quad N_n = N_n \cap N,$$

考虑乘积空间  $(\times N_n, \times N_n)$  上的乘积测度  $\times P_{v_n}$  和  $\times P_{\lambda_n}$ . 由于 Poisson 过程的无后效性, 得知

$$P_v \perp P_\lambda \text{ 当且仅当 } \times P_{v_n} \perp \times P_{\lambda_n},$$

$$P_v \ll P_\lambda \text{ 当且仅当 } \times P_{v_n} \ll \times P_{\lambda_n}.$$

由引理46及定理1.39得

$$\begin{aligned} K_v(P_v, P_\lambda) &= \prod_i K_v(P_{v_n}, P_{\lambda_n}) = \prod_i \exp(-\frac{1}{2}(K_d(v_n, \lambda_n))^2) \\ &= \exp(-\frac{1}{2} \sum_i (K_d(v_n, \lambda_n))^2) = \exp(-\frac{1}{2}(K_d(v, \lambda))^2). \end{aligned}$$

从而由定理1.39, 得知

$$P_v \perp P_\lambda \text{ 当且仅当 } K_d(v, \lambda) = \infty, \text{ 而 } P_v \ll P_\lambda \text{ 当且仅当 } K_d(v, \lambda) < \infty \text{ 及 } v \ll \lambda, \text{ 证毕.}$$

## §7. Gauss-Poisson过程

附注

58. 定义 设  $P \in \mathcal{P}_1$ , 并且满足

$$\bar{P}(\mu: \mu(X) > 2) = 0,$$

则称  $P$  是 Gauss-Poisson 分布; 简记为 G-P 分布.

对于 G-P 分布  $P$ , 如果记

$$N_1 = (\mu: \mu(X) = 1), \quad N_2 = (\mu: \mu(X) = 2),$$

并命

$$\bar{P}_1(\cdot) = \bar{P}((\cdot) \cap N_1), \quad \bar{P}_2(\cdot) = \bar{P}((\cdot) \cap N_2),$$

则  $P = \bar{P}_1 + \bar{P}_2$ , 于是  $P$  可以写为卷积形式

$$P = \bar{P}_1 * \bar{P}_1 + \bar{P}_1 * \bar{P}_2 + \bar{P}_2 * \bar{P}_1 + \bar{P}_2 * \bar{P}_2,$$

其中  $\bar{P}_i$  显然是以  $\bar{P}_i$  为典测度的 Poisson 过程.

如果将  $N_2$  分解为

$$N_2' = (\mu: \mu = 2\delta_a, a \in X),$$

$$N_2'' = (\mu: \mu = \delta_a + \delta_b, a \in X, b \in X, a \neq b),$$

则  $N_2 = N_2' \cup N_2''$ ,  $N_2' \cap N_2'' = \emptyset$ , 并命

$$\bar{P}_2'(\cdot) = \bar{P}_2((\cdot) \cap N_2'), \quad \bar{P}_2''(\cdot) = \bar{P}_2((\cdot) \cap N_2''),$$

则  $P = \bar{P}_1 + \bar{P}_2' + \bar{P}_2''$  从而

$$P = 2' P_1 * 2' P_2' * 2' P_2'' \quad (*)$$

若以 $D$ 记 $X \times X$ 的对角线, 即 $D = \{(a, a) : a \in X\}$ . 又设 $g_1, g_2$ 分别是 $X, X \times X$ 到 $N_1, N_2$ 的映象:

$$g_1(a) = \delta_{a_1}, \quad g_2(a, b) = \delta_a + \delta_b$$

则

$$g_1^{-1}(N_1) = X, \quad g_2^{-1}(N_2') = D, \quad g_2^{-1}(N_2'') = X \times X \setminus D.$$

称 $(X \times X, \mathscr{A} \times \mathscr{A})$ 上的测度 $G$ 为对称的, 如果对于任意的 $A \in \mathscr{A}, B \in \mathscr{A}$ 有

$$G(A \times B) = G(B \times A).$$

下面的定理刻画 $G$ - $P$ 分布.

51. 定理 设 $P \in \mathscr{P}_N$ , 则 $P$ 是 $G$ - $P$ 分布当且仅当 $P$ 的Laplace变换具有如下形式:

$$\begin{aligned} -\log \Psi_P(f) = & \int (1 - e^{-f(a)}) \gamma_1(da) \\ & + \iint (1 - e^{-f(a)} - f(b)) \gamma_2(da \times db), \quad f \in \mathscr{F}_{m+}, \end{aligned}$$

其中 $\gamma_1, \gamma_2$ 是 $(X \times X, \mathscr{A} \times \mathscr{A})$ 上的局部有限对称测度, 而且对任意的 $A \in \mathscr{A}, \gamma_2(A \times X) < \infty$ .

证明 必要性 设 $P$ 是 $G$ - $P$ 分布, 由引理31的1°得

$$\Psi_P(f) = \exp(-\int (1 - e^{-f}) P(d\mu)), \quad f \in \mathscr{F}_{m+},$$

又因为 $P = P_1 + P_2$ 得

$$-\log \Psi_P(f) = \int (1 - e^{-f}) P_1(d\mu) + \int (1 - e^{-f}) P_2(d\mu), \quad f \in \mathscr{F}_{m+},$$

命

$$\gamma_1(A) = P_1(\mu: \mu = \delta_a, a \in A), \quad A \in \mathscr{A},$$

$$\gamma_2(A \times A) = P_2(\mu: \mu = \delta_a + \delta_b, (a, b) \in A \times A), \quad A \in \mathscr{A},$$

$$\gamma_2(A \times B) = \frac{1}{2} P_2(\mu: \mu = \delta_a + \delta_b, a \in A, b \in B), \quad A \cap B = \emptyset, A, B \in \mathscr{A}.$$

容易见到,  $\gamma_2(\cdot)$ 可以扩张为 $(X \times X, \mathscr{A} \times \mathscr{A})$ 上的对称测度, 并且我们有

$$P_1 = \gamma_1 g_1^{-1}, \quad P_2 = \gamma_2 g_2^{-1}$$

从而

$$\begin{aligned} -\log \Psi_P(f) = & \int (1 - e^{-f(a)}) \gamma_1(da) \\ & + \iint (1 - e^{-f(a)} - f(b)) \gamma_2(da \times db), \quad f \in \mathscr{F}_{m+}, \end{aligned}$$

并且对任意的 $A \in \mathscr{A}$ , 有

$$\begin{aligned} \gamma_2(A \times X) &= \gamma_2(A \times A) + \gamma_2(A \times A^c) \\ &= P_2(\mu: \mu = \delta_a + \delta_b, (a, b) \in A \times A) + \frac{1}{2} P_2(\mu: \mu = \delta_a + \delta_b, (a, b) \in A \times A^c) \\ &\leq P(\mu: \mu(A) > 0) < \infty. \end{aligned}$$

充分性 设 $P \in \mathscr{P}_N$ , 而且 $P$ 的Laplace变换有定理所述的形式. 令

$$P_1 = \gamma_1 g_1^{-1}, \quad P_2 = \gamma_2 g_2^{-1}, \quad P = P_1 + P_2,$$

则有

$$\begin{aligned} -\log \mathcal{W}_P(f) &= \int (1 - e^{-f}) P_1(d\mu) + \int (1 - e^{-f}) P_2(d\mu) \\ &= \int (1 - e^{-f}) P(d\mu), \quad f \in \mathcal{F}_{M+}, \end{aligned}$$

从而  $P$  与  $\mathcal{W}_P$  具有相同的 Laplace 变换, 因此  $P = \mathcal{W}_P$ . 又容易看出,

$$P(\mu: \mu(X) > 2) = 0,$$

所以  $P$  是  $G$ - $P$  分布.

52. 定理 设  $P \in \mathcal{S}_M$ , 则  $P$  是  $G$ - $P$  分布当且仅当  $P$  的 Laplace 变换具有如下形式:

$$\begin{aligned} -\log \mathcal{W}_P(f) &= \int (1 - e^{-f(a)}) \lambda(da) \\ &\quad - \iint (1 - e^{-f(a)}) (1 - e^{-f(b)}) H(da \times db), \quad f \in \mathcal{F}_{M+}, \end{aligned}$$

其中  $\lambda \in M$ ,  $H$  是  $(X \times X, \mathcal{A} \times \mathcal{A})$  上的局部有限对称测度, 满足条件

$$H(A \times B) \leq \frac{1}{2} \min(\lambda(A), \lambda(B)), \quad A, B \in \mathcal{A}.$$

证明 对于定理 51 中的  $\gamma_1, \gamma_2$ , 命

$$\lambda(\cdot) = \gamma_1(\cdot) + \gamma_2(\cdot \times X) + \gamma_2(X \times \cdot);$$

$$H(\cdot) = \gamma_2(\cdot),$$

则对任意的  $A, B \in \mathcal{A}$ , 有

$$H(A \times B) \leq \gamma_2(A \times X) \leq \frac{1}{2} \lambda(A);$$

再由

$$\begin{aligned} &\iint (1 - e^{-f(a)}) (1 - e^{-f(b)}) H(da \times db) \\ &= 2 \int (1 - e^{-f(a)}) H(da \times X) - \iint (1 - e^{-f(a) - f(b)}) H(da \times db) \end{aligned}$$

可见定理 51 中的  $\mathcal{W}_P$  表达式与本定理中所述的表达式是一致的. 证毕.

一般说来,  $G$ - $P$  分布不一定是无后效的. 这一点与 Poisson 分布不同. 一个很特殊的情况是,  $G$ - $P$  分布  $P$  无后效的充分必要条件是定义 50 中的  $(\bullet)$  式变为

$$P = \mathcal{W}_P * \mathcal{W}_P.$$

## §8. 正则无穷可分分布

53. 定义 设  $P \in \mathcal{S}_{IN}$ , 满足

$$P(\mu: \mu(X) = \infty) = 0,$$

则称  $P$  是正则无穷可分分布.

设  $P$  是正则无穷可分分布, 记

$$N_k = \{\mu: \mu(X) = k\}, \quad k = 1, 2, \dots,$$

并命

$$P_k(\cdot) = P(N_k \cap (\cdot)), \quad k=1, 2, \dots,$$

则  $P = \sum_{k=1}^{\infty} P_k$ , 从而

$$\mathcal{P} = \sum_{k=1}^{\infty} \mathcal{P}_k.$$

我们以  $X^k$  记  $X$  的  $k$  次乘积, 其中由开集产生的  $\sigma$  代数记为  $\mathcal{A}^k$ , 而将全体有界 Borel 集记为  $\mathcal{B}^k$ .

称  $\mathcal{A}^k$  上的测度  $G$  是完全对称的, 如果对任意的  $A_1, \dots, A_k \in \mathcal{A}$  以及  $(1, 2, \dots, k)$  的任意排列  $(j_1, \dots, j_k)$  有

$$G(A_1 \times \dots \times A_k) = G(A_{j_1} \times \dots \times A_{j_k}).$$

现在我们将  $N_k$  进一步分解. 设  $j$  是不超过  $k$  的正整数, 记

$$N_{k,j} = \{\mu \in N_k, \mu \text{ 有 } j \text{ 个不同的原子}\},$$

则有  $N_k = \bigcup_{j=1}^k N_{k,j}$ .

下述定理刻画了正则无穷可分分布.

**84. 定理** 设  $P \in \mathcal{P}_N$ , 则  $P$  是正则无穷可分分布的充分必要条件为

$$-\log_2 \mathcal{P}(f) = \sum_{k=1}^{\infty} \int (1 - \exp(-\sum_{i=1}^k f(a_i))) \gamma_k(da_1 \times \dots \times da_k),$$

凡  $f \in \mathcal{F}_m$ , 其中  $\gamma_k$  是  $(X^k, \mathcal{A}^k)$  上的完全对称局部有限测度, 满足条件: 对任意  $A \in \mathcal{B}$ ,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k(X^k \setminus (A^c)^k) < \infty.$$

这里  $A^c$  是  $A$  的余集,  $(A^c)^k$  表示  $A^c$  的  $k$  次乘积集.

**证明** 必要性 任一  $\mu \in N_k$  有  $j$  个不同的原子, 将它们以适当的方式排成

$$Z_1(\mu), Z_2(\mu), \dots, Z_j(\mu)$$

可使得变换  $\mu \mapsto Z_j(\mu)$  对任意  $h, j, s, 1 \leq j \leq k, 1 \leq s \leq N_k$  至  $X$  的可测变换. 这时如果  $\mu = h_1 \delta_{x_1(\mu)} + \dots + h_j \delta_{x_j(\mu)}$  则定义  $\varphi_k$  为:

$$\varphi_k(\mu) = (\underbrace{Z_1(\mu), \dots, Z_1(\mu)}_{k_1 \uparrow}, \dots, \underbrace{Z_j(\mu), \dots, Z_j(\mu)}_{k_j \uparrow}) \in X^k.$$

$\varphi_k$  是  $N_k$  到  $X^k$  的可测变换. 令  $\gamma_k$  为测度  $P_k \varphi_k^{-1}(\cdot)$  的对称化, 则

$$-\log \Psi_P(f) = \sum_{k=1}^{\infty} \int (1 - e^{-\mu f}) P_k(d\mu), \quad f \in \mathcal{F}_{m+},$$

利用积分变换得:

$$-\log \Psi_P(f) = \sum_{k=1}^{\infty} \int (1 - \exp(-\sum_{i=1}^k f(a_i))) \gamma_k(da_1 \times \cdots \times da_k),$$

又因为

$$\begin{aligned} \gamma_k(X^k(A^c)^k) &= \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=1}^k \gamma_k(A^j \times (A^c)^{k-j}) \\ &= P(\mu: \mu(A) > 0) < \infty, \end{aligned}$$

必要性得证.

充分性 现设  $P \in \mathcal{S}_N$ ,  $P$  的 Laplace 变换具有定理中所述的形式. 对于  $k \geq 1$ , 令  $g_k$  是  $X^k$  到  $N_k$  的映像:

$$g_k(a_1, \dots, a_k) = \delta_{a_1} + \cdots + \delta_{a_k}, \quad (a_1, \dots, a_k) \in X^k,$$

并命

$$P_k = \gamma_k \circ g_k^{-1}, \quad k=1, 2, \dots,$$

$$P = \sum_{k=1}^{\infty} P_k.$$

则显然  $P(0) = 0$ , 且因为对任意的  $A \in \mathcal{S}$ , 有

$$P(\mu: \mu(A) > 0) = \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k(X^k(A^c)^k) < \infty,$$

所以  $P \in \mathcal{S}_N$ , 此时定理中  $\Psi_P(f)$  的表达式化为:

$$-\log \Psi_P(f) = \sum_{k=1}^{\infty} \int (1 - e^{-\mu f}) P_k(d\mu), \quad f \in \mathcal{F}_{m+},$$

从而  $P$  与  $\sum_{k=1}^{\infty} P_k$  具有相同的 Laplace 变换.  $P = \sum_{k=1}^{\infty} P_k$ , 故知  $P$  是无穷可分的. 容易验证

$$P(\mu: \mu(X) = \infty) = 0,$$

即  $P$  是正则无穷可分分布.

55. 引理 设  $k, j$  是正整数,  $k \leq j$ , 则

$$\sum_{n=k}^j (-1)^{n-k} \binom{n}{k} \binom{j}{n} = \begin{cases} 1, & \text{当 } j=k, \\ 0, & \text{当 } j>k. \end{cases}$$

证明 因为

$$\begin{aligned} \sum_{n=k}^j (-1)^{n-k} \binom{n}{k} \binom{j}{n} &= \sum_{n=k}^j (-1)^{n-k} \frac{n!}{k!(n-k)!} \frac{j!}{n!(j-n)!} \dots \\ &= \sum_{n=k}^j (-1)^{n-k} \frac{j!}{k!(j-k)!} \frac{(j-k)!}{(n-k)!(j-n)!} \\ &= \sum_{n=k}^j (-1)^{n-k} \binom{j}{k} \binom{j-k}{n-k} = \binom{j}{k} \sum_{i=0}^{j-k} (-1)^i \binom{j-k}{i} \\ &= \binom{j}{k} (1-1)^{j-k}. \text{ 得证} \end{aligned}$$

88. 引理 设  $H_k$  是  $(X^k, \mathcal{A}^k)$  上的完全对称测度, 满足条件: 对任意的  $A \in \mathcal{A}$ ,  $H_k(A \times X^{k-1}) < \infty$ , 则对任意的  $A \in \mathcal{A}$  有

$$(-1)^{k-1} H_k(A^k) = \sum_{n=1}^k (-1)^{k-n} \binom{k}{n} H_k((X^n \setminus A^n) \times X^{k-n}),$$

证明 记  $A^c$  为  $B$ . 首先注意, 对  $A \in \mathcal{A}$  有

$$\begin{aligned} X^n \setminus B^n &\subset (A \times X^{n-1}) \cup (X \times A \times X^{n-2}) \cup \dots \cup (X^{n-1} \times A), \\ H_k((X^n \setminus B^n) \times X^{k-n}) &\leq n H_k(A \times X^{k-1}) < \infty, \end{aligned}$$

因此引理中等式右边各项都是有限的. 又由  $H_k$  的完全对称性可知: 对于  $1 \leq n \leq k$ ,

$$H_k((X^n \setminus B^n) \times X^{k-n}) = \sum_{j=1}^n \sum_{i=0}^{k-n} \binom{n}{j} \binom{k-n}{i} H_k(A^{i+j} \times B^{k-i-j}),$$

于是

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^k (-1)^{k-n} \binom{k}{n} H_k((X^n \setminus B^n) \times X^{k-n}) \\ = \sum_{n=1}^k (-1)^{k-n} \sum_{j=1}^n \sum_{i=0}^{k-n} \binom{k}{n} \binom{n}{j} \binom{k-n}{i} H_k(A^{i+j} \times B^{k-i-j}), \end{aligned}$$

考虑上式右边  $H_k(A^s \times B^{k-s})$  的系数, 其中  $s$  是不超过  $k$  的正整数, 得:

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^k (-1)^{k-n} \sum_{\substack{1 \leq j \leq n \\ 0 \leq i \leq k-n \\ i+j=s}} \binom{k}{n} \binom{n}{j} \binom{k-n}{i} \\ = \sum_{n=1}^k (-1)^{k-n} \sum_{j=\max\{1, n+s-k\}}^{\min\{n, s\}} \binom{k}{n} \binom{n}{j} \binom{k-n}{s-j} \\ = \sum_{n=1}^k (-1)^{k-n} \sum_{j=\max\{1, n+s-k\}}^{\min\{n, s\}} \frac{n!}{j!(n-j)!} \frac{(k-n)!}{(s-j)!(k-n-s+j)!} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{n=1}^k (-1)^{k-n} \sum_{j=\max(1, n+s-k)}^{\min(n+s)} \frac{1}{s!(h-s)!j!(s-j)!(n-j)!(k-s-n+j)!} \\
&= \binom{k}{s} \sum_{n=1}^k (-1)^{k-n} \sum_{j=\max(1, n+s-k)}^{\min(n+s)} \binom{s}{j} \binom{k-s}{n-j} \\
&= \binom{k}{s} \sum_{j=1}^s \binom{s}{j} \sum_{n=j}^{k-s+j} (-1)^{k-n} \binom{k-s}{n-j} = \binom{k}{s} \sum_{j=1}^s \binom{s}{j} \sum_{i=0}^{k-s-j} (-1)^{k-i+j} \binom{k-s}{i} \\
&= \binom{k}{s} \sum_{j=1}^s \binom{s}{j} (-1)^j \sum_{i=0}^{k-s-j} (-1)^{k-i} \binom{k-s}{i} = \begin{cases} (-1)^{k-1}, & \text{当 } s=k \\ 0, & \text{当 } 1 \leq s < k. \end{cases}
\end{aligned}$$

由此即可得证引理中的等式。

57. 定义 设  $P \in \mathcal{P}_{IN}$ , 称  $P$  是  $n$ -正则无穷可分分布, 如果

$$\tilde{P}(\mu: \mu(X) > n) = 0.$$

按照这个定义, Poisson 分布是 1-正则无穷可分分布,  $G-E$  分布是 2-正则无穷可分分布。任何的  $n$ -正则无穷可分分布都是正则无穷可分分布。对于  $n$ -正则无穷可分分布, 定理 54 中的  $\gamma_k$  满足条件:

$$\gamma_k = 0, \quad k > n.$$

下面的定理将定理 52 推广到  $n$ -正则无穷可分分布。

58. 定理 设  $P \in \mathcal{P}_n$ , 则  $P$  是  $n$ -正则无穷可分分布, 当且仅当  $P$  的 Laplace 变换为:

$$\log \varphi_P(f) = \sum_{j=1}^n \int \prod_{i=1}^j (e^{-f x_i} - 1) H_j f d a_1 \times \cdots \times d a_j, \quad f \in \mathcal{F}_{m+},$$

其中  $H_j (1 \leq j \leq n)$  满足条件:  $H_j$  是  $(X^j, \mathcal{M}^j)$  上的局部有限完全对称测度, 而对任意的  $k$ ,  $1 \leq k \leq n$ , 以及任意的  $A_1, \dots, A_k \in \mathcal{B}$ , 有

$$0 \leq \sum_{j=k}^n (-1)^{j-k} \binom{j}{k} H_j(A_1 \times \cdots \times A_k \times X^{j-k}) < \infty.$$

证明 必要性 设  $P$  是  $n$ -正则的无穷可分分布, 取定理 54 中的  $\gamma_1, \dots, \gamma_n (\gamma_k = 0, \text{当 } k > n)$ 。我们令

$$H_k(A_1 \times \cdots \times A_k) = \sum_{j=k}^n \binom{j}{k} \gamma_j(A_1 \times \cdots \times A_k \times X^{j-k}),$$

其中  $1 \leq k \leq n$ , 显然  $H_k$  是  $(X^k, \mathcal{M}^k)$  上的局部有限完全对称测度, 因为

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=k}^n (-1)^{j-k} \binom{j}{k} H_j(A_1 \times \cdots \times A_k \times X^{j-k}) \\
&= \sum_{j=k}^n (-1)^{j-k} \binom{j}{k} \sum_{i=j}^n \binom{i}{j} \gamma_i(A_1 \times \cdots \times A_k \times X^{i-j})
\end{aligned}$$

$$= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^i (-1)^{i-j} \binom{i}{j} \binom{j}{i-j} \gamma_i(A_1 \times \cdots \times A_k \times X^{i-j}),$$

由引理55, 上式右边为  $\gamma_k(A_1 \times \cdots \times A_k)$ , 所以

$$0 \leq \sum_{j=1}^n (-1)^{i-j} \binom{i}{j} H_i(A_1 \times \cdots \times A_k \times X^{i-j}) = \gamma_k(A_1 \times \cdots \times A_k) < \infty,$$

现在对于任意的  $f \in \mathcal{F}_{m+}$ , 由定理54及上面的式子可得:

$$\begin{aligned} \log \Psi_r(f) &= \sum_{k=1}^n \int (\exp(-\sum_{i=1}^k f(a_i)) - 1) \gamma_k(da_1 \times \cdots \times da_k) \\ &= \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n (-1)^{j-k} \binom{j}{k} \int (\exp(-\sum_{i=1}^j f(a_i)) - 1) H_j(da_1 \times \cdots \times da_j) \\ &= \sum_{j=1}^n \int \sum_{k=1}^j (-1)^{j-k} \binom{j}{k} (\exp(-\sum_{i=1}^j f(a_i)) - 1) H_j(da_1 \times \cdots \times da_j) \\ &= \sum_{j=1}^n \int \prod_{i=1}^j (\exp(-f(a_i)) - 1) H_j(da_1 \times \cdots \times da_j), \end{aligned}$$

必要性得证.

充分性 现设  $P \in \mathcal{P}_n$ , 而且  $\Psi_r(\cdot)$  具有定理中所述的形式, 对任意的  $A_1, \dots, A_k \in \mathcal{F}$ ,  $1 \leq k \leq n$ , 令

$$\gamma_k(A_1 \times \cdots \times A_k) = \sum_{j=1}^n (-1)^{j-k} \binom{j}{k} H_j(A_1 \times \cdots \times A_k \times X^{j-k}),$$

将  $\gamma_k$  扩张为  $(X^k, \mathcal{F}^k)$  上的测度, 容易验证  $\gamma_k$  满足定理54中的条件. 将上面必要性证明中的过程倒推, 就得

$$\log \Psi_r(f) = \sum_{k=1}^n \int (\exp(-\sum_{i=1}^k f(a_i)) - 1) \gamma_k(da_1 \times \cdots \times da_k),$$

由定理54知,  $P$  是  $n$ -正则无穷可分分布.

由定理54及58, 可以得如下的公式.

59. 推论 设  $P$  是  $n$ -正则无穷可分分布,  $\gamma_k, H_k, (1 \leq k \leq n)$  如定理54及58所示, 则对任意的  $A \in \mathcal{F}$  有

$$\tilde{P}(\mu: \mu(A) > 0) = \sum_{k=1}^n \gamma_k(X^k \setminus (A^c)^k) = \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} H_k(A^c).$$

证明 由  $\gamma_k$  的定义, 上式中的第一个等号是显然的. 又由定理58证明中的必要性部分可知,

$$H_k(A_1 \times \cdots \times A_k) = \sum_{j=1}^n \binom{j}{k} \gamma_j(A_1 \times \cdots \times A_k \times X^{j-k}), \quad 1 \leq k \leq n,$$



因此对任意的  $A \in \mathcal{A}$ , 有

$$H_k(A \times X^{k-1}) = \sum_{j=1}^n \binom{j}{k} \gamma_j(A \times X^{j-1}) < \infty,$$

从而  $H_k$  满足引理 56 的条件。因此由引理 56 得:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \gamma_k(X^k \setminus (A^c)^k) &= \sum_{k=1}^n \sum_{j=k}^n (-1)^{j-k} \binom{j}{k} H_j((X^k \setminus (A^c)^k) \times X^{j-k}) \\ &= \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^j (-1)^{j-k} \binom{j}{k} H_j((X^k \setminus (A^c)^k) \times X^{j-k}) = \sum_{j=1}^n (-1)^{j-1} H_j(A^c). \end{aligned}$$

在结束本节之前, 我们从另外一个角度给正则无穷可分分布一个有用的判别法则。为此, 须要介绍两个一般的引理。

**60. 引理** 设  $P, Q \in \mathcal{P}_{N^+}$ ,  $A \in \mathcal{A}$ , 记

$$Y_0 = \{ \mu_1, \mu_2(A) = 0 \},$$

如果  $P(Y_0) > 0, Q(Y_0) > 0$ , 令

$$P_1(\cdot) = P(\cdot | Y_0), \quad Q_1(\cdot) = Q(\cdot | Y_0),$$

则

$$P_1 * Q_1(\cdot) = P * Q(\cdot | Y_0).$$

**证明** 由于

$$(P * Q)(Y_0) = P \times Q((\mu_1, \mu_2): (\mu_1 + \mu_2)(A) = 0) = P(Y_0)Q(Y_0),$$

所以对于  $Y \in N$  有:

$$\begin{aligned} (P * Q)(Y | Y_0) &= \frac{(P * Q)(Y \cap Y_0)}{P(Y_0)Q(Y_0)} \\ &= \frac{P \times Q((\mu_1, \mu_2): \mu_1 + \mu_2 \in Y, \mu_1(A) = \mu_2(A) = 0)}{P(Y_0)Q(Y_0)} \\ &= P_1 \times Q_1((\mu_1, \mu_2): \mu_1 + \mu_2 \in Y) = P_1 * Q_1(Y). \end{aligned}$$

**61. 引理** 设  $P \in \mathcal{P}_{IN^+}$ ,  $A \in \mathcal{A}$ ,  $P(\mu_1, \mu(A) = 0) > 0$ , 则  $P(\cdot | Y_0) \in \mathcal{P}_{IN^+}$ , 其中  $Y_0 = \{ \mu_1, \mu(A) = 0 \}$ , 而且

$$P(\cdot | Y_0) = \overline{P}(\cdot \cap Y_0),$$

方程

$$P = P(\cdot | Y_0) * Q$$

存在唯一解  $Q \in \mathcal{P}_{IN^+}$  使

$$\overline{Q}(\cdot) = \overline{P}(\cdot \cap Y_0^c),$$

其中  $Y_0^c = \{ \mu_1, \mu(A) > 0 \} = N \setminus Y_0$ .

**证明** 由引理 60, 以及  $P \in \mathcal{P}_{IN^+}$  得知:

$$P(\cdot | Y_0) = (\overline{Q} \overline{P}(\cdot | Y_0))^*,$$

故  $P(\cdot | Y_0) \in \mathcal{P}_{IN^+}$ .

现设

$$E_1 = \bar{P}(\{ \cdot \} \cap Y_0), \quad E_2 = \bar{P}(\{ \cdot \} \cap Y_0^c),$$

则  $E_1, E_2 \in \mathcal{E}_n, L_1 + E_2 = \bar{P}$ . 于是存在  $P_1, P_2 \in \mathcal{P}_{1N}$ , 使  $\bar{P}_1 = E_1, \bar{P}_2 = E_2, P = P_1 * P_2$ .

但是

$$P_1(\mu_1, \mu(A) = 0) = e^{-\bar{P}_1(\mu; \mu(A) > 0)} = 1,$$

所以

$$P_1(\cdot | Y_0) = P_1(\cdot),$$

又

$$P_2(\mu_2, \mu(X) = 0) = e^{-\bar{P}_2(\mu; \mu(X) > 0)} = e^{-L_2(\mu; \mu(X) > 0)} = P_2(\mu_2, \mu(A) = 0),$$

此即

$$P_2(\mu_2, \mu(A) = 0, \mu(X) > 0) = 0,$$

这说明  $P_2(\cdot | Y_0) = \delta_0$ . 再次应用引理60得,

$$P(\cdot | Y_0) = (P_1 * P_2)(\cdot | Y_0) = P_1(\cdot | Y_0) * P_2(\cdot | Y_0) = P_1 * \delta_0 = P_1,$$

所以

$$\overline{P(\cdot | Y_0)} = \bar{P}_1 = E_1 = \bar{P}(\{ \cdot \} \cap Y_0).$$

**62. 定理** 设  $P \in \mathcal{P}_{1N}$ ,  $A_k \uparrow X, A_k \in \mathcal{A}$ . 则  $P$  是正则无穷可分分布的充分必要条件为: 对任意的  $k \geq 1$  有,

$$\lim_{m \rightarrow \infty} P(\mu_1, \mu(A_k) = 0 | \mu(A_m \setminus A_k) = 0) = P(\mu_2, \mu(A_k) = 0).$$

**证明** 设  $P \in \mathcal{P}_{1N}$ , 且  $\bar{P}(\mu_1, \mu(X) = \infty) = 0$ . 又设  $k \geq 1$  固定. 因为对于任意的  $m, n$ ,  $m > n$  有

$$P(\mu_1, \mu(A_m \setminus A_n) = 0) > 0,$$

故可令

$$P_1(\cdot) = P(\cdot | \mu(A_m \setminus A_n) = 0).$$

由引理61, 存在唯一的  $P_2 \in \mathcal{P}_{1N}$  使

$$P = P_1 * P_2.$$

记

$$_{A_k} \|P_1 - P\| = \|_{A_k} P_1 - _{A_k} P\|,$$

则

$$_{A_k} \|P_1 - P\| = _{A_k} \|P_1 - P_1 * P_2\|$$

$$\leq \|\delta_0 - _{A_k} P_2\| = (\delta_0 - _{A_k} P_2) \cdot (N) + (\delta_0 - _{A_k} P_2) \cdot (N)$$

$$= 2(_{A_k} P_2)(\mu_1, \mu(X) \neq 0) = 2P_2(\mu_2, \mu(A_k) > 0)$$

$$= 2(1 - e^{-\bar{P}(\mu; \mu(A_k) > 0, \mu(A_m \setminus A_n) > 0)})$$

$$\leq 2(1 - e^{-\bar{P}(\mu; \mu(A_k) > 0, \mu(X) > 0)})$$

注意到  $(\mu_1, \mu(X \setminus A_n) > 0) \downarrow (\mu_2, \mu(X) = \infty)$  且,

$$\bar{P}(\mu_1, \mu(X) = \infty) = 0,$$

可知对于任意的  $\epsilon > 0$ , 当  $n$  充分大时有,

$$_{A_k} \|P_1 - P\| < \epsilon,$$

即有

$$|P(\mu: \mu(A_k) = 0 | \mu(A_m \setminus A_n) = 0) - P(\mu: \mu(A_k) = 0)| < \varepsilon,$$

这说明

$$\lim_{n, m \rightarrow \infty} P(\mu: \mu(A_k) = 0 | \mu(A_m \setminus A_n) = 0) = P(\mu: \mu(A_k) = 0);$$

反之, 如果上式成立, 由引理61及定理31的5)可知,

$$P(\mu: \mu(A_k) = 0 | \mu(A_m \setminus A_n) = 0) = \exp(-P(\mu: \mu(A_k) > 0, \mu(A_m \setminus A_n) = 0)),$$

以及

$$P(\mu: \mu(A_k) = 0) = \exp(-P(\mu: \mu(A_k) > 0)).$$

从而可推知, 对 $\varepsilon > 0$ , 存在 $n_0 > 0$ 使当 $m > n \geq n_0$ 时,

$$P(\mu: \mu(A_k) > 0, \mu(A_m \setminus A_n) > 0) < \varepsilon,$$

固定 $n \geq n_0$ 而令 $m \rightarrow \infty$ 则

$$P(\mu: \mu(A_k) > 0, \mu(X \setminus A_n) > 0) \leq \varepsilon, \quad n \geq n_0,$$

但因为对 $n \geq n_0$ 有,

$$P(\mu: \mu(A_k) > 0, \mu(X) = \infty) \leq P(\mu: \mu(A_k) > 0, \mu(X \setminus A_n) > 0) \leq \varepsilon,$$

所以对任意的 $k \geq 1$ 都有,

$$P(\mu: \mu(A_k) > 0, \mu(X) = \infty) = 0,$$

从而最后得到,

$$P(\mu: \mu(X) = \infty) = \lim_{k \rightarrow \infty} P(\mu: \mu(A_k) > 0, \mu(X) = \infty) = 0,$$

即 $P$ 是正则无穷可分分布。

由于这个结果, 我们直接得到下面的推论。

**63. 推论** 如果 $P \in \mathcal{P}_{IN}$ 且 $P$ 无后效, 则 $P$ 必是正则无穷可分分布。

这结果也可由定理31的8)直接推出。

设 $P \in \mathcal{P}_{IN}$ , 采用定义53中的记号, 令

$$N'_n = \{\mu: \mu = n\delta_a, a \in X\}$$

则由定理31的8)知,  $P \in \mathcal{P}_{IN}$ 是无后效的当且仅当 $P$ 可以表成形式

$$P = \sum_{n=1}^{\infty} p'_n P'_n$$

其中 $P'_n(\cdot) = P(N'_n \cap (\cdot))$ , 具有这种形式的分布称为广义Poisson分布。因此, 无穷可分分布 $P$ 是无后效的当且仅当 $P$ 是广义Poisson分布。

## §9. 奇异无穷可分分布

**64. 定义** 设 $P \in \mathcal{P}_{IN}$ , 满足

$$P(\mu: \mu(X) < \infty) = 0,$$

则称 $P$ 是奇异无穷可分分布。

现设 $P \in \mathcal{P}_{IN}$ , 且令

$$N_\infty = \{\mu: \mu(X) = \infty\},$$

$$N_n = \{\mu: \mu(X) = n\}, \quad 1 \leq n < \infty,$$

并命

$$\bar{P}_\infty(\cdot) = \bar{P}(\cdot \cap N_\infty),$$

$$\bar{P}_n(\cdot) = \bar{P}(\cdot \cap N_n), \quad 1 \leq n < \infty,$$

则  $\bar{P} = \bar{P}_\infty + \sum_{n=1}^{\infty} \bar{P}_n$ . 于是由引理27,

$$\mathcal{P} \bar{P} = \mathcal{P} \bar{P}_\infty * (\sum_{n=1}^{\infty} \mathcal{P} \bar{P}_n),$$

其中  $\mathcal{P} \bar{P}_\infty$  是奇异无穷可分分布,  $\sum_{n=1}^{\infty} \mathcal{P} \bar{P}_n$  是正则无穷可分分布.

由推论63, 任何奇异无穷可分分布都是有后效的. 下面的定理进一步指出了这个事实.

**65. 定理** 设  $P \in \mathcal{S}_{IN}, A_k \uparrow X, A_k \in \mathcal{S}$ . 则  $P$  是奇异无穷可分分布, 当且仅当 对于任意的正整数  $k \geq 1$  有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(\mu: \mu(A_k) = 0 | (\mu(A_{k+n} \setminus A_k) = 0)) = 1.$$

**证明** 因为当  $k \rightarrow \infty$  时总有

$$P(\mu: \mu(A_k) > 0, \mu(X \setminus A_k) = 0) \rightarrow P(\mu: \mu(X) < \infty),$$

而当  $n \rightarrow \infty$  时总有

$$P(\mu: \mu(A_k) > 0, \mu(A_{k+n} \setminus A_k) = 0) \rightarrow P(\mu: \mu(A_k) > 0, \mu(X \setminus A_k) = 0),$$

所以条件

$$P(\mu: \mu(X) < \infty) = 0$$

等价于条件

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(\mu: \mu(A_k) > 0, \mu(A_{k+n} \setminus A_k) = 0) = 0;$$

然而我们有

$$P(\mu: \mu(A_k) = 0 | (\mu: \mu(A_{k+n} \setminus A_k) = 0))$$

$$= \exp(-P(\mu: \mu(A_k) > 0, \mu(A_{k+n} \setminus A_k) = 0)),$$

因而条件

$$P(\mu: \mu(A_k) = 0 | (\mu: \mu(A_{k+n} \setminus A_k) = 0)) \rightarrow 1, \quad (n \rightarrow \infty),$$

等价于条件

$$P(\mu: \mu(A_k) > 0, \mu(A_{k+n} \setminus A_k) = 0) \rightarrow 0, \quad (n \rightarrow \infty).$$

定理得证.

## 第四章 点过程的收敛

本章讨论随机点过程的收敛性问题。§1与§2是预备知识，§3~§6讨论点过程收敛的一般原则，§7~§9分别讨论点过程的无穷小迭加收敛于Poisson过程、Gauss-Poisson过程以及正则无穷可分点过程的充分必要条件。

### §1. Campbell 测度

1. 定义 对于任意的  $\mu \in N$ ，容易知道  $\mu \times \delta_\mu$  是  $(X \times N, \mathcal{A} \times N)$  上的测度。又对于任意的  $Z \in \mathcal{A} \times N$ ，容易知道映射

$$\mu \sim \mu \times \delta_\mu(Z)$$

是定义于  $(N, N)$  上的非负可测函数。因此对于任意一个  $(N, N)$  上的测度  $H$ ，如果令

$$\mathcal{G}_H(\cdot) = \int \mu \times \delta_\mu(\cdot) H(d\mu)$$

则  $\mathcal{G}_H$  是  $(X \times N, \mathcal{A} \times N)$  上的测度，称之为  $H$  的 Campbell 测度。

由定义知，对于  $A \in \mathcal{A}$ ， $Y \in N$ ，有

$$\mathcal{G}_H(A \times Y) = \int \mu \times \delta_\mu(A \times Y) H(d\mu) = \int_Y \mu(A) H(d\mu),$$

特别取  $Y = N$ ，则

$$\mathcal{G}_H(A \times N) = \int_N \mu(A) H(d\mu) = I_H(A)$$

即是  $H$  的一阶矩测度。

对于  $(X \times N, \mathcal{A} \times N)$  上的非负可测函数  $f(a, \mu)$ ，由  $H$  的 Campbell 测度的定义不难证明，

$$\iint f(a, \mu) \mu(da) H(d\mu) = \int f(a, \mu) \mathcal{G}_H(da \times d\mu).$$

2. 引理 设  $f(a, \mu)$  是  $(X \times N, \mathcal{A} \times N)$  上的非负可测实函数，记

$$Y_f = \{\mu: \int f(a, \mu) \mu(da) = 1\},$$

则对任意的  $Y \in N$  以及  $N$  上的任意测度  $H$  有

$$H(Y \cap Y_f) = \int_{Y \cap Y_f} f(a, \mu) \mathcal{G}_H(da \times d\mu).$$

证明 因为

$$\begin{aligned} & \int_{Y \cap Y_f} 1(\mu) f(a, \mu) \mathcal{G}_H(da \times d\mu) \\ &= \int_{Y \cap Y_f} 1(\mu) \int f(a, \mu) \mu(da) H(d\mu) = \int 1_{Y \cap Y_f}(\mu) H(d\mu) = H(Y \cap Y_f). \end{aligned}$$

3. 定理 设  $A \in \mathcal{A}$ ， $Y \in N$ ，则对  $N$  上的任意测度  $H$  有

$$H(\mu: \mu \in Y, 0 < \mu(A) < \infty) \\ = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \mathcal{G}_H(A \times \{\mu: \mu \in Y, \mu(A) = k\}).$$

**证明 命**

$$f(a, \mu) = \begin{cases} 0, & a \notin A, \\ (\mu(A))^{-1}, & a \in A, \end{cases}$$

则对任意  $\mu \in N$ , 如果  $0 < \mu(A) < \infty$ , 必有

$$\int f(a, \mu) \mu(da) = 1,$$

所以  $Y_f = \{\mu: 0 < \mu(A) < \infty\}$ . 由引理 2 得

$$H(Y \cap Y_f) = \int \frac{1}{\mu(Y_f)} (\mu) f(a, \mu) \mathcal{G}_H(da \times d\mu) \\ = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \mathcal{G}_H(A \times \{\mu: \mu \in Y, \mu(A) = k\}).$$

定理中的公式, 称为反演公式.

**4. 定理**  $\mathcal{G}_{H_1} = \mathcal{G}_{H_2}$  的充分必要条件为

$$H_1((\cdot) \setminus \{0\}) = H_2((\cdot) \setminus \{0\}).$$

**证明** 只须证明必要性. 对任意的  $A \in \mathcal{A}$ , 由定理 3 可知, 对任意的  $Y \in N$  有

$$H_1(Y \cap \{\mu: \mu(A) > 0\}) = H_2(Y \cap \{\mu: \mu(A) > 0\}),$$

现设  $A_n \uparrow X$ , 则

$$H_1(Y \setminus \{0\}) = \lim_{n \rightarrow \infty} H_1(Y \cap \{\mu: \mu(A_n) > 0\}) \\ = \lim_{n \rightarrow \infty} H_2(Y \cap \{\mu: \mu(A_n) > 0\}) = H_2(Y \setminus \{0\}).$$

这个定理称为唯一性定理.

一般说来, 即使  $H$  是有限的,  $\mathcal{G}_H$  也不一定是有限测度. 但我们有.

**5. 定理**  $\mathcal{G}_H$  是  $\sigma$  有限的, 当且仅当  $H((\cdot) \setminus \{0\})$  是  $\sigma$  有限的.

**证明** 充分性 设  $H((\cdot) \setminus \{0\})$  是  $\sigma$  有限的, 于是存在  $Y_n \in N$ ,  $n = 1, 2, \dots$  使

$$H(Y_n) < \infty, \bigcup_{n=1}^{\infty} Y_n = N \setminus \{0\},$$

设  $A_m \in \mathcal{A}$ ,  $A_m \uparrow X$ ,  $m = 1, 2, \dots$ , 由定理 3 知

$$H(\mu: \mu \in Y_n, 0 < \mu(A_m) < \infty) \\ = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \mathcal{G}_H(A_m \times \{\mu: \mu \in Y_n, \mu(A_m) = k\}) < \infty,$$

所以  $\mathcal{G}_H(A_m \times \{\mu: \mu \in Y_n, \mu(A_m) = k\}) < \infty$  对一切  $m, n, k$  都成立. 然而

$$X \setminus \{0\} = \bigcup_{m, n, k} (A_m \times \{\mu: \mu \in Y_n, \mu(A_m) = k\}),$$

所以  $\mathcal{G}_H$  是  $\sigma$  有限的.

、必要性 应用第一段末的关系式并利用如下事实:

可测空间  $(\Omega, \mathcal{F})$  上的测度  $\mu$  为  $\sigma$  有限的充要条件为: 存在  $(\Omega, \mathcal{F})$  上处处为正的 可测函数  $f$ , 使

$$\int f(\omega) \mu(d\omega) < \infty.$$

## §2. $Z^m$ 上依范数收敛定理及其推论

6. 引理 设  $P \in \mathcal{S}_N$ , 则  $P \in \mathcal{S}_{IN}$  的充分必要条件为: 对任意互不相交的  $A_1, \dots, A_m \in \mathcal{A}$ , 作为  $Z^m_+$  上的概率分布  $P_{A_1, \dots, A_m}$  是无穷可分的.

证明 只证充分性. 假定  $A_1, \dots, A_m \in \mathcal{A}$  且互不相交. 固定  $h \geq 1$  令

$$p^{A_1, \dots, A_m} = \sqrt[h]{P_{A_1, \dots, A_m}},$$

容易验证分布族  $\{p^{A_1, \dots, A_m} : m \geq 1, A_1, \dots, A_m \in \mathcal{A} \text{ 且 互不相交} \}$  满足定理 I. 13 的条件 1)~4). 于是存在分布  $Q \in \mathcal{S}_N$ , 使

$$Q_{A_1, \dots, A_m} = p^{A_1, \dots, A_m} = \sqrt[h]{P_{A_1, \dots, A_m}},$$

因而

$$(Q^h)_{A_1, \dots, A_m} = P_{A_1, \dots, A_m},$$

由推论 I. 5 知  $Q^h = P$ . 由  $h$  的任意性可知  $P$  确为无穷可分分布.

在第三章中我们讨论了  $(N, \mathbb{N})$  上的全体有限广义测度  $\mathcal{G}_r$ , 并定义

$$\|E\| = (E^+ + E^-)(N), \quad E \in \mathcal{G}_r.$$

现在如果取  $X = \{1, 2, \dots, m\}$ , 则相应的  $\mathcal{G}_r$  就是定义于  $Z^m_+$  上的全体实函数  $E$ , 满足:

$$\|E\| = \sum_{h_1, \dots, h_m \in Z_+} |E(h_1, \dots, h_m)| < \infty.$$

7. 定理 设  $E_n, n = 1, 2, \dots$  是  $Z^m_+$  上的有限测度序列. 为使  $E_n, n = 1, 2, \dots$  依范数收敛于  $Z^m_+$  上的某个有限测度  $E$ , 充分必要条件是下列极限都存在:

$$\lim_n \sum_{h_1, \dots, h_m \in Z_+} E_n(h_1, \dots, h_m) = c,$$

$$\lim_n E_n(h_1, \dots, h_m) = c(h_1, \dots, h_m), \quad \text{凡 } (h_1, \dots, h_m) \in Z^m_+,$$

并且

$$\sum_{h_1, \dots, h_m \in Z_+} c(h_1, \dots, h_m) = c,$$

这时必有

$$E(h_1, \dots, h_m) = c(h_1, \dots, h_m).$$

**证明** 必要性 设  $\|E_n - E\| \rightarrow 0$ 。于是

$$\lim_n \sum_{h_1, \dots, h_m \in Z_+^m} |E_n(h_1, \dots, h_m) - E(h_1, \dots, h_m)| = 0,$$

由此易推知对每  $(h_1, \dots, h_m) \in Z_+^m$ , 极限

$$c(h_1, \dots, h_m) = \lim_n E_n(h_1, \dots, h_m)$$

存在且等于  $E(h_1, \dots, h_m)$ , 并且

$$\lim_n \sum_{h_1, \dots, h_m \in Z_+^m} E_n(h_1, \dots, h_m) = \sum_{h_1, \dots, h_m \in Z_+^m} E(h_1, \dots, h_m).$$

**充分性** 假定定理的条件成立。对  $(h_1, \dots, h_m) \in Z_+^m$  命

$$E(h_1, \dots, h_m) = c(h_1, \dots, h_m),$$

如此定义了  $Z_+^m$  上的测度  $E$ 。由于定理条件已假定了极限

$$\lim_n \sum_{h_1, \dots, h_m \in Z_+^m} E_n(h_1, \dots, h_m) = c$$

存在且等于

$$\begin{aligned} c &= \sum_{h_1, \dots, h_m \in Z_+^m} c(h_1, \dots, h_m) = \sum_{h_1, \dots, h_m \in Z_+^m} E(h_1, \dots, h_m) \\ &= E(Z_+^m), \end{aligned}$$

所以  $E$  是  $Z_+^m$  上的有限测度。命

$$F = E + \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} (\|E_n\| + 1)^{-1} E_n,$$

则  $F$  也是  $Z_+^m$  上的有限测度, 而且

$$E \ll F, \quad E_n \ll F, \quad n=1, 2, \dots,$$

设  $f, f_n, n=1, 2, \dots$  分别是  $E, E_n, n=1, 2, \dots$  相对于  $F$  的 Radon-Nikodym 导数, 则易知

$$|f_n - f| \rightarrow 0, \quad a.e.F, \quad n \rightarrow \infty,$$

$$|f_n - f| \leq 2, \quad a.e.F,$$

所以

$$\lim_n \|E_n - E\| = \lim_n \int |f_n - f| dF = 0.$$

由引理6及定理7我们得到如下的推论。

**8. 推论** 设  $E_n \in \mathcal{E}_+^f$ ,  $P_n = \mathcal{N} E_n$ ,  $n=1, 2, \dots$ , 又设  $P \in \mathcal{P}_N$  使  $\lim_n \|P_n - P\| = 0$ , 则



$P \in \mathcal{P}_{1N}$ .

**证明** 由引理6, 我们只须证明对任意互不相交的  $A_1, \dots, A_m \in \mathcal{A}$ ,  $P_{A_1}, \dots, P_{A_m}$  是  $Z_+^m$  上的无穷可分分布. 既然  $P_{A_1}, \dots, P_{A_m}$  是  $Z_+^m$  上的分布, 因而不失一般性, 我们可以假定  $X = \{1, 2, \dots, m\}$ .

由于  $P_n = \mathcal{P}_{E_n}$ , 故对任意的正整数  $k$ ,  $\sqrt[k]{P_n}$  存在. 将  $Z_+^m$  中的点排好序, 应用对角线方法选取  $n_1 < n_2 < \dots < n_j < \dots$  使

$$e(h_1, \dots, h_m) = \lim_j \sqrt[k]{P_{n_j}}(h_1, \dots, h_m)$$

对一切  $(h_1, \dots, h_m) \in Z_+^m$  存在. 命

$$Q(h_1, \dots, h_m) = e(h_1, \dots, h_m), \quad (h_1, \dots, h_m) \in Z_+^m$$

则  $Q$  是  $Z_+^m$  上的有限测度.

由于  $\|P_{n_j} - P\| \rightarrow 0$  ( $j \rightarrow \infty$ ), 由定理7得

$$\begin{aligned} & \lim_j \sum_{0 \leq h_1, \dots, h_m \leq h} P_{n_j}(h_1, \dots, h_m) \\ &= \sum_{0 \leq h_1, \dots, h_m \leq h} P(h_1, \dots, h_m), \end{aligned}$$

从而

$$\lim_j \sum_{0 \leq h_1, \dots, h_m \leq h} P_{n_j}(h_1, \dots, h_m) \rightarrow 1, \quad (h \rightarrow \infty),$$

于是也有

$$\lim_j \sum_{0 \leq h_1, \dots, h_m \leq h} \sqrt[k]{P_{n_j}}(h_1, \dots, h_m) \rightarrow 1, \quad (h \rightarrow \infty),$$

从而知道:

$$\begin{aligned} Q(Z_+^m) &= \lim_{h \rightarrow \infty} \sum_{0 \leq h_1, \dots, h_m \leq h} Q(h_1, \dots, h_m) \\ &= \lim_{h \rightarrow \infty} \sum_{0 \leq h_1, \dots, h_m \leq h} e(h_1, \dots, h_m) = \lim_{h \rightarrow \infty} \lim_{j \rightarrow \infty} \sum_{0 \leq h_1, \dots, h_m \leq h} \sqrt[k]{P_{n_j}}(h_1, \dots, h_m) \\ &= 1, \end{aligned}$$

即  $Q$  是  $Z_+^m$  上的概率分布. 又由定理7知道

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \|\sqrt[k]{P_{n_j}} - Q\| = 0,$$

从而  $\lim_{j \rightarrow \infty} \|P_{n_j} - Q^k\| = 0$ , 即  $Q^k = P$ , 从而  $P \in \mathcal{P}_{1N}$ .

我们下面还要给出定理7的几个推论. 首先注意, 在定义1.43中, 对于任意的  $P \in \mathcal{P}_N$ , 定义了  $P$  的完全连续集和有界完全连续集. 这个定义显然对于任意的  $E \in \mathcal{E}$ , 也适用. 对于  $E \in \mathcal{E}_0$ , 按照定义1.43的记号, 如果  $A \in \mathcal{A}$  且

$$E(N \setminus \partial_\Delta N) = 0,$$

则称 $A$ 是 $E$ 的完全连续集。全体 $E$ 的完全连续集记为 $\mathcal{AC}_E$ 。全体有界的 $E$ 完全连续集记为 $\mathcal{AC}_E$ 。有关的结果,例如引理 I.44及 I.45对 $\mathcal{AC}_E$ 和 $\mathcal{AC}_E$ 仍然成立。

9. 推论 设 $E \in \mathcal{E}_+$ ,  $E_n \in \mathcal{E}_+$ ,  $n=1,2,\dots$ 。则

$$E_n \xrightarrow{w} E$$

当且仅当对任意互不相交的 $A_1, \dots, A_m \in \mathcal{AC}_E$ 有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \| (E_n)_{A_1, \dots, A_m} - E_{A_1, \dots, A_m} \| = 0.$$

证明 由于 $E, E_n$ ,  $n=1,2,\dots$ 都是有限测度,不失一般性可设它们都是概率测度。这时由定理 I.52的等价条件1)与4)以及本章的定理7可得本推论。

10. 推论 设 $E, E', E_n, E'_n \in \mathcal{E}_+$ ,  $n=1,2,\dots$ 并且

$$E_n \xrightarrow{w} E, \quad E'_n \xrightarrow{w} E'$$

则

$$E_n * E'_n \xrightarrow{w} E * E'.$$

证明 只须对 $E(N) > 0$ ,  $E'(N) > 0$ 的情况证明即可。此时

$$I_{\mathbb{R}^+}(\partial A) = E'(N)I_E(\partial A) + E(N)I_{E'}(\partial A),$$

因此 $\mathcal{AC}_{(E \otimes E')^+} = \mathcal{AC}_E \cap \mathcal{AC}_{E'}$ 。现设 $A_1, \dots, A_m \in \mathcal{AC}_{(E \otimes E')^+}$ 且互不相交,则

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} \| (E_n * E'_n)_{A_1, \dots, A_m} - (E * E')_{A_1, \dots, A_m} \| \\ & \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \| (E_n)_{A_1, \dots, A_m} * (E'_n)_{A_1, \dots, A_m} \\ & \quad - E_{A_1, \dots, A_m} * (E')_{A_1, \dots, A_m} \| + \limsup_{n \rightarrow \infty} \| E_{A_1, \dots, A_m} * (E'_n)_{A_1, \dots, A_m} \\ & \quad - E_{A_1, \dots, A_m} * E'_{A_1, \dots, A_m} \| \\ & \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} E'_n(N) \| (E_n)_{A_1, \dots, A_m} - E_{A_1, \dots, A_m} \| \\ & \quad + E(N) \limsup_{n \rightarrow \infty} \| (E'_n)_{A_1, \dots, A_m} - E'_{A_1, \dots, A_m} \| = 0, \end{aligned}$$

由推论9即得本推论。

11. 推论  $\mathcal{S}_N$ 在距离空间 $(\mathcal{E}_+, \rho_{\mathcal{E}_+})$ 中是闭集。

证明 设 $P_n \in \mathcal{S}_N$ ,  $n=1,2,\dots$ 且 $P_n \xrightarrow{w} P$ , 欲证 $P \in \mathcal{S}_N$ 。固定自然数 $k$ 及任意 $A \in \mathcal{A}$ 。设 $j > 0$ 则

$$k\sqrt{P_n}(\mu; \mu(A) \geq j) \leq P_n(\mu; \mu(A) \geq j),$$

由定理 I.41知 $\{k\sqrt{P_n}, n=1,2,\dots\}$ 是弱相对紧的,于是存在子序列 $\{n_i\}$ 及 $P^{(k)}$ 使

$$k\sqrt{P_{nj}} \xrightarrow{w} P^{(k)},$$

但由推论10得  $P_n \xrightarrow{w} (P^{(k)})^k = P$ , 从而  $P^{(k)} = k\sqrt{P}$ , 所以  $P \in \mathcal{S}_{IN}$ .

### §3. 强无穷小三角序列

12. 在第Ⅰ章中曾讨论了强无穷小三角序列, 给出了相应的收敛定理. 但在那里没有讨论这样的问题: 强无穷小三角序列如果收敛, 是否一定收敛于无穷可分分布? 下面的定理肯定地回答了这一问题. 首先回忆一下强无穷小三角序列的定义.

设  $\{P_{nj}, n \in \mathbb{Z}_+, 1 \leq j \leq h_n\} \subset \mathcal{S}_N$ . 如果

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \min_{1 \leq j \leq h_n} P_{nj}(\{0\}) = 1,$$

则称  $\{P_{nj}\}$  是强无穷小三角序列. 这显然等价于

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \max_{1 \leq j \leq h_n} (1 - P_{nj}(\{0\})) = 0.$$

13. 定理 设  $\{P_{nj}\}$  是强无穷小三角序列. 如果存在  $P \in \mathcal{S}_N$  使

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \| \sum_{1 \leq j \leq h_n} P_{nj} - P \| = 0,$$

则  $P \in \mathcal{S}_{IN}$ .

证明 根据引理6, 我们只须证明对任意互不相交的  $A_1, \dots, A_m \in \mathcal{S}$ ,  $P_{A_1}, \dots, P_{A_m}$  是无穷可分的. 由  $P_{A_1}, \dots, P_{A_m}$  是  $\mathbb{Z}_+^m$  上的概率分布, 故不失一般性, 我们可以假定  $X = \{1, 2, \dots, m\}$ .

现在首先证明

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \sum_{1 \leq j \leq h_n} (1 - P_{nj}(0)) < \infty$$

不然的话, 则存在  $n_1 < n_2 < \dots < n_i < \dots$ , 使

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \sum_{1 \leq j \leq h_{n_i}} (1 - P_{n_i j}(0)) = \infty,$$

为了书写简便起见, 不妨设  $n_1 = 1, n_2 = 2, \dots, n_i = i, \dots$ , 于是有  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{1 \leq j \leq h_n} (1 - P_{nj}(0)) = \infty$ .

考虑  $X = \{1, 2, \dots, m\}$  上以  $P_{nj}$  为分布的点过程  $\xi_{nj}$  (实际上是  $\mathbb{Z}_+^m$  值的随机向量), 且设对每一  $n, \xi_{n1}, \xi_{n2}, \dots, \xi_{nh_n}$  是相互独立的. 若以  $Q_n$  记它们的联合分布, 则

$$Q_n = P_{n1} \times \dots \times P_{nh_n}, \quad n = 1, 2, \dots.$$

命

$$\eta_{nj} = \min(\xi_{nj}(X), 1), \quad 1 \leq j \leq h_n, n = 1, 2, \dots$$

则对每一  $n, \eta_{n1}, \eta_{n2}, \dots, \eta_{nk_n}$  是相互独立的随机变量,  $\eta_{nj}$  具有如下的分布

$$P_{nj}(0)\delta_0 + (1 - P_{nj}(0))\delta_1, \quad n=1, 2, \dots, \quad 1 \leq j \leq k_n.$$

应用切比雪夫不等式得,

$$\begin{aligned} & \limsup_{n \rightarrow \infty} Q_n \left( \sum_{1 \leq j \leq k_n} \eta_{nj} \leq \frac{1}{2} \sum_{1 \leq j \leq k_n} (1 - P_{nj}(0)) \right) \\ & \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} Q_n \left( \left| \sum_{1 \leq j \leq k_n} (\eta_{nj} - 1 + P_{nj}(0)) \right| \geq \frac{1}{2} \sum_{1 \leq j \leq k_n} (1 - P_{nj}(0)) \right) \\ & \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{4 \sum_{1 \leq j \leq k_n} P_{nj}(0) (1 - P_{nj}(0))}{\left( \sum_{1 \leq j \leq k_n} (1 - P_{nj}(0)) \right)^2} \\ & \leq 4 \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sum_{1 \leq j \leq k_n} (1 - P_{nj}(0))} = 0, \end{aligned}$$

从而对任意正整数  $l$  有

$$\begin{aligned} & \limsup_{n \rightarrow \infty} \left( \sum_{1 \leq j \leq k_n} P_{nj} \right) (\mu: \mu(X) \leq l) \\ & \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} Q_n \left( \sum_{1 \leq j \leq k_n} \xi_{nj}(X) \leq l \right) = 0, \end{aligned}$$

另一方面, 由于  $X = \{1, 2, \dots, m\}$  以及  $\|\sum_{1 \leq j \leq k_n} P_{nj} - P\| \rightarrow 0$ , 得,

$$\begin{aligned} & \lim_{l \rightarrow \infty} \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \sum_{1 \leq j \leq k_n} P_{nj} \right) (\mu: \mu(X) \leq l) \\ & = \lim_{l \rightarrow \infty} P(\mu: \mu(X) \leq l) = 1, \end{aligned}$$

这就导出矛盾。因此我们证明了

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \sum_{1 \leq j \leq k_n} (1 - P_{nj}(0)) < \infty.$$

于是由强无穷小三角序列的定义推知

$$\begin{aligned} & \limsup_{n \rightarrow \infty} \sum_{1 \leq j \leq k_n} (1 - P_{nj}(0))^2 \\ & \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \max_{1 \leq j \leq k_n} (1 - P_{nj}(0)) \sum_{1 \leq j \leq k_n} (1 - P_{nj}(0)) = 0, \end{aligned}$$

现在应用定理 1.18 得到,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\| \sum_{1 \leq j \leq k_n} P_{nj} - \sum_{1 \leq j \leq k_n} P_{nj} \right\| = 0,$$

因此亦有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\| \sum_{1 \leq j \leq k_n} P_{nj} - P \right\| = 0,$$

如果我们命

$$P_n = \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_n} P_{i_1 i_2 \dots i_n}, \quad n=1, 2, \dots,$$

则由推论 8 知  $P \in \mathcal{S}_{IN}$ 。定理证毕。

## §4. 距离空间 $(\mathcal{S}_n, \rho_{\mathcal{S}_n})$

**14. 引理** 在  $X$  中取定一点, 以  $S_d$  记半径  $d$  而中心在这定点的闭球。对任意的  $\mu \in N$ , 命

$$v(\mu) = \sup \{d : \mu(S_d) = 0\},$$

则  $v(\mu)$  是从  $(N, \rho_N)$  到  $[0, \infty]$  的连续映像。

**证明** 显然  $v(\mu) = +\infty$  当且仅当  $\mu = 0$ 。设  $\mu_n, \mu \neq 0$  是  $N$  中的元并且  $\mu_n \xrightarrow{I} \mu$ , 要证  $\lim_{n \rightarrow \infty} v(\mu_n) = v(\mu)$ 。

当  $d < v(\mu)$  时,  $\mu(\partial S_d) = 0$ , 从而由定理 1.22 的 2) 得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mu_n(S_d) = \mu(S_d) = 0,$$

因此  $d \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} v(\mu_n)$  即  $v(\mu) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} v(\mu_n)$ ; 当  $d > v(\mu)$  时, 由定理 1.22 的 3) 知

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \mu_n(S_d) \geq \mu(S_d) \geq 1,$$

因此  $\limsup_{n \rightarrow \infty} v(\mu_n) \leq d$ , 即  $v(\mu) \geq \limsup_{n \rightarrow \infty} v(\mu_n)$ 。结合上面的不等式就有

$$v(\mu) = \lim_{n \rightarrow \infty} v(\mu_n).$$

**15. 定义** 记  $N^d = N \setminus \{0\}$ , 在  $N^d$  上定义

$$\rho_{N^d}(\mu, \lambda) = \rho_N(\mu, \lambda) + |v(\mu) - v(\lambda)|, \quad \mu, \lambda \in N^d,$$

容易验证  $\rho_{N^d}$  是  $N^d$  上的距离。

与  $(N, \rho_N)$  不同,  $(N^d, \rho_{N^d})$  不再是有界距离空间了。由引理 14, 如果将  $\rho_N$  限制在  $N$  上, 则  $\rho_N$  与  $\rho_{N^d}$  在  $N^d$  上产生同一拓扑。

**16. 引理**  $(N^d, \rho_{N^d})$  是可分完备距离空间。

**证明** 只证完备性, 设  $\mu_n \in N^d, n=1, 2, \dots$  是  $\rho_{N^d}$  意义下的 Cauchy 序列, 当然对距离  $\rho_N$  而言它也是 Cauchy 序列。由于  $\rho_N$  是完备距离, 故存在  $\mu \in N$ , 使  $\mu_n \xrightarrow{I} \mu$ 。现证  $\mu \neq 0$ , 即  $\mu \in N^d$ 。不然的话, 由引理 14 将得出

$$\lim_{n \rightarrow \infty} v(\mu_n) = v(\mu) = +\infty,$$

但因  $\{\mu_n\}$  是  $\rho_{N^d}$  意义下的 Cauchy 序列, 故当  $m, n \rightarrow \infty$  时有

$$|\nu(\mu_n) - \nu(\mu_m)| \longrightarrow 0,$$

这便得出矛盾。所以  $\mu \neq 0$ 。

仍由引理14及  $\rho_{N^d}$  的定义看出  $\rho_{N^d}(\mu_n, \mu)$  当  $n$  趋于无穷时趋于0，即  $\{\mu_n\}$  在  $\rho_{N^d}$  意义下收敛于  $\mu$ 。所以  $(N^d, \rho_{N^d})$  是完备的。

下面的引理描述了  $(N^d, \rho_{N^d})$  中的全部有界集，这正是我们所需要的。

**17. 引理**  $N^d$  的子集  $Y$  在  $\rho_{N^d}$  意义下是有界的，当且仅当存在  $A \in \mathcal{A}$  使

$$Y \subset \{\mu : \mu \in N, \mu(A) > 0\}.$$

**证明** 必要性 对任意固定的  $\lambda \in N^d$ ，有

$$\sup_{\mu \in Y} |\nu(\mu) - \nu(\lambda)| \leq \sup_{\mu \in Y} \rho_{N^d}(\mu, \lambda) < \infty,$$

从而也有

$$\sup_{\mu \in Y} \nu(\mu) < \infty.$$

任取  $d > \sup_{\mu \in Y} \nu(\mu)$  则

$$Y \subset \{\mu^d : \mu(S_d) > 0\},$$

充分性 取  $d$  使  $A \subset S_d$  则

$$Y \subset \{\mu : \mu(S_d) > 0\}.$$

所以

$$\sup_{\mu \in Y} \nu(\mu) \leq d < \infty,$$

任取  $\lambda \in N^d$ ，则

$$\sup_{\mu \in Y} \rho_{N^d}(\mu, \lambda) \leq \sup_{\mu \in Y} \rho_N(\mu, \lambda) + \sup_{\mu \in Y} (\nu(\mu) + \nu(\lambda)) < \infty,$$

所以  $Y$  在  $\rho_{N^d}$  意义下是有界的。

**18. 定义** 令

$$N^d = (N \setminus \{0\}) \cap N,$$

显然  $N^d$  是  $(N^d, \rho_{N^d})$  中的全体 Borel 子集，以  $\mathcal{B}(N^d)$  记其中的全体有界 Borel 集。

注意， $(N, \rho_N)$  是有界距离空间，因而  $(N, \rho_N)$  中全体 Borel 集与全体有界 Borel 集是一回事。但  $(N^d, \rho_{N^d})$  不再是有界距离空间，因而  $N^d$  和  $\mathcal{B}(N^d)$  是有区别的。

由于  $(N^d, \rho_{N^d})$  是非有界的可分完备距离空间，在  $(N^d, \rho_{N^d})$  上可定义局部有限测度，全体  $(N^d, \rho_{N^d})$  上的局部有限测度记作  $\mathcal{E}_\infty$ 。

现在我们回忆一下在 §.26 中定义的  $\mathcal{E}_\infty$ 。按照那里的定义， $\mathcal{E}_\infty$  是全体满足如下条件的测度， $E \in \mathcal{E}_\infty$  当且仅当，

$$1) E(\{0\}) = 0,$$

$$2) E(\mu : \mu(A) > 0) < \infty, \quad \forall A \in \mathcal{A}.$$

对于  $E \in \mathcal{E}_\infty$ ，令

$$E^d(Y) = E(Y), \quad \forall Y \in N^d,$$

则  $E \in \mathcal{E}_m^d$ 。容易验证映射  $E \mapsto E^d$  是  $\mathcal{E}_m$  到  $\mathcal{E}_m^d$  上的——映射。由于  $\mathcal{E}_m^d$  是  $(N^d, \rho_{N^d})$  上的全体局部有限测度, 按照 I.23, 我们可以在  $\mathcal{E}_m^d$  上引入距离  $\rho_{\mathcal{E}_m^d}$  使  $(\mathcal{E}_m^d, \rho_{\mathcal{E}_m^d})$  是有界的可分完备距离空间, 在  $\rho_{\mathcal{E}_m^d}$  意义下的收敛, 即是局部弱收敛。

现在对于任意的  $E_1, E_2 \in \mathcal{E}_m$ , 命

$$\rho_{\mathcal{E}_m}(E_1, E_2) = \rho_{\mathcal{E}_m^d}(E_1^d, E_2^d),$$

则由于映射  $E \mapsto E^d$  是——的且满射的, 所以  $\rho_{\mathcal{E}_m}$  是  $\mathcal{E}_m$  上的距离, 并且  $(\mathcal{E}_m, \rho_{\mathcal{E}_m})$  与  $(\mathcal{E}_m^d, \rho_{\mathcal{E}_m^d})$  是同胚的, 因而  $(\mathcal{E}_m, \rho_{\mathcal{E}_m})$  是可分完备的。

**19. 引理** 设  $E \in \mathcal{E}_m$ ,  $E_n \in \mathcal{E}_m$ ,  $n=1, 2, \dots$ 。为使  $\{E_n\}$  在  $\rho_{\mathcal{E}_m}$  意义下收敛于  $E$ , 充分必要条件为: 对于  $(N, \rho_N)$  上定义的任何一个支撑包含在某个如下集合

$$(\mu: \mu \in N, \mu(A) > 0), \quad A \in \mathcal{M},$$

的有界连续函数  $f(\mu)$ , 都有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int f(\mu) E_n(d\mu) = \int f(\mu) E(d\mu).$$

**证明** 由前段中关于  $\rho_{\mathcal{E}_m}$  及  $\rho_{\mathcal{E}_m^d}$  的关系以及  $(N^d, \rho_{N^d})$  中有界集的构造, 不难验明本引理。

我们约定,  $\mathcal{E}_m$  中的序列  $\{E_n\}$  在距离  $\rho_{\mathcal{E}_m}$  意义下收敛于某个  $E \in \mathcal{E}_m$ , 仍记作  $E_n \xrightarrow{I} E$ 。

下面的引理推广了推论 9。我们先将定义 II.43 推广到  $\mathcal{E}_m$  上去。设  $A \in \mathcal{M}$ , 命

$$\partial_A N = \{\mu: \mu(\partial A) = 0\},$$

如果  $E \in \mathcal{E}_m$ , 并且

$$E(N \setminus \partial_A N) = 0,$$

则称  $A$  是  $E$  的完全连续集; 全体  $E$  的完全连续集记作  $\mathcal{M}_{CE}$ , 以  $\mathcal{M}_{CE}$  记  $E$  的全体有界完全连续集。

**20. 引理** 设  $E \in \mathcal{E}_m$ ,  $E_n \in \mathcal{E}_m$ ,  $n=1, 2, \dots$ 。则

$$E_n \xrightarrow{I} E$$

当且仅当对任意互不相交的  $A_1, \dots, A_m \in \mathcal{M}_{CE}$ , 有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|(E_n)_{A_1}, \dots, (E_n)_{A_m}(\cdot \setminus \{0, \dots, 0\}) - E_{A_1}, \dots, E_{A_m}(\cdot \setminus \{0, \dots, 0\})\| = 0,$$

其中  $(0, \dots, 0)$  是  $Z_m^*$  中的零点。

**证明 必要性** 设  $E_n \xrightarrow{I} E$ . 对任意互不相交的  $A_1, \dots, A_m \in \mathcal{A}_{CF}$ , 命  $A = \bigcup_{i=1}^m A_i$ , 且

以  $f(\mu)$  记集合

$$(\mu: \mu \in N, \mu(A) > 0).$$

的示性函数。容易证明  $f(\mu)$  的不连续点集  $D_f$  含于集合  $(\mu: \mu \in N, \mu(\partial A) > 0)$  之中, 因

而  $E(D_f) = 0$ . 利用这一点及  $E_n \xrightarrow{I} E$  可证明如下定义的有限测度,

$$F_n(\cdot) = E_n((\cdot) \cap (\mu: \mu(A) > 0)), \quad n = 1, 2, \dots,$$

$$F(\cdot) = E((\cdot) \cap (\mu: \mu(A) > 0))$$

满足关系式  $F_n \xrightarrow{w} F$ , 并且  $A_1, \dots, A_m \in \mathcal{A}_{CF}$ .

于是由推论 9, 得到

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \|(E_n)_{A_1, \dots, A_m}((\cdot) \setminus (0, \dots, 0)) - E_{A_1, \dots, A_m}((\cdot) \setminus (0, \dots, 0))\| \\ = \lim_{n \rightarrow \infty} \|(F_n)_{A_1, \dots, A_m}((\cdot) \setminus (0, \dots, 0)) - F_{A_1, \dots, A_m}((\cdot) \setminus (0, \dots, 0))\| = 0. \end{aligned}$$

**充分性** 设定理条件满足,  $g(\mu)$  是  $(N, \rho_\mu)$  上的有界连续函数且其支 承 含 于  $(\mu: \mu(A) > 0)$  之中, 这里  $A \in \mathcal{A}$ . 取  $B \in \mathcal{A}_{CF}$  且  $B \supset A$ , 则对于如下的有限测度,

$$E_n((\cdot) \cap (\mu: \mu(B) > 0)), \quad n = 1, 2, \dots,$$

$$E((\cdot) \cap (\mu: \mu(B) > 0)),$$

由推论 9 得

$$E_n((\cdot) \cap (\mu: \mu(B) > 0)) \xrightarrow{w} E((\cdot) \cap (\mu: \mu(B) > 0)),$$

于是有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int g(\mu) E_n(d\mu) = \int g(\mu) E(d\mu),$$

所以  $E_n \xrightarrow{I} E$ .

由推论 9 及引理 20, 我们得到下面有用的结果.

**21. 引理** 设  $P_n \in \mathcal{P}_{IN}$ ,  $P_n$  是相应的正则测度,  $n = 1, 2, \dots$ , 则  $P_n \xrightarrow{w} P$  当且仅当  $P_n \xrightarrow{I} P$ .

**证明** 设  $A_1, \dots, A_m \in \mathcal{A}_{CF}$  且互不相交. 由定理 11.35 得

$$\overline{(P_n)}_{A_1, \dots, A_m} = (P_n)_{A_1, \dots, A_m}((\cdot) \setminus (0, \dots, 0)), \quad n = 1, 2, \dots,$$

$$\overline{(P)}_{A_1, \dots, A_m} = P_{A_1, \dots, A_m}((\cdot) \setminus (0, \dots, 0)),$$

再由定理 11.19 推知

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|(P_n)_{A_1, \dots, A_m} - P_{A_1, \dots, A_m}\| = 0$$



等价于

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|(\mathbf{P}_n)_{i_1, \dots, i_m} \{(\cdot) \setminus (0, \dots, 0) - (\mathbf{P})_{i_1, \dots, i_m} \{(\cdot) \setminus (0, \dots, 0)\}\|$$

由完全连续集的定义推知  $\mathcal{S}_{CP} = \mathcal{S}_{CF}$ , 从而应用推论9及引理20知  $P_n \xrightarrow{w} P$  等价于  $\mathbb{P}_n \xrightarrow{I} P$ .

22.  $\mathcal{S}_N, \mathcal{S}_+, \mathcal{S}_\infty$  都是  $(N, N)$  上的测度集.  $P \in \mathcal{S}_N$  称为点分布,  $\mathcal{S}_+$  是  $(N, N)$  上的有限测度集,  $\mathcal{S}_\infty$  是满足条件  $E(\{0\}) = 0$ , 且对任意的  $A \in \mathcal{S}$ ,

$$E(\mu: \mu(A) > 0) < \infty$$

的测度集.  $\mathcal{S}_N$  是  $(\mathcal{S}_+, \rho_{\mathcal{S}_+})$  中的闭子集, 然而  $(\mathcal{S}_+, \rho_{\mathcal{S}_+})$  不是  $(\mathcal{S}_\infty, \rho_{\mathcal{S}_\infty})$  的子空间.

我们注意,  $\mathcal{S}_+$  是  $(N, \rho_N)$  上的全部有限测度且因为  $(N, \rho_N)$  是有界距离空间, 所以  $\mathcal{S}_+$  又可看作是  $(N, \rho_N)$  上的全部局部有限测度集.

然而  $\mathcal{S}_\infty$  不是  $(N, \rho_N)$  上的局部有限测度集, 它是通过距离空间  $(N^d, \rho_{N^d})$  定义的. 由于前面诸段所述的理由, 我们今后就集  $\mathcal{S}_\infty$  看作  $\mathcal{S}_\infty^d$ , 两者不加区别.

## §5. $(\mathcal{S}_\infty, \rho_{\mathcal{S}_\infty})$ 中的收敛

23. 引理 设  $E \in \mathcal{S}_\infty$ ,  $E_n \in \mathcal{S}_\infty$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , 并且

$$E_n \xrightarrow{I} E,$$

则对任意  $A \in \mathcal{S}_{CF}$  有

$$I_E(A) \leq \liminf_n I_{E_n}(A).$$

证明 由引理 1.45 (引理 1.45 是对  $P \in \mathcal{S}_N$  证明的, 其实不须作什么修改就可推广到  $\mathcal{S}_\infty$  上去),  $A \in \mathcal{S}_{CF}$  的充要条件为

$$Y_j = \{\mu: \mu(A) = j\} \in \mathcal{S}_E(N),$$

这里  $\mathcal{S}_E(N)$  是  $E$  的有界连续集类. 于是由  $E_n \xrightarrow{I} E$  并用 Fatou 引理得

$$\begin{aligned} I_E(A) &= \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^k j E(\mu: \mu(A) = j) \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \lim_n \sum_{j=1}^k j E_n(\mu: \mu(A) = j) \\ &\leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^{\infty} j E_n(\mu: \mu(A) = j) = \liminf_{n \rightarrow \infty} I_{E_n}(A). \end{aligned}$$

24. 引理 设  $E \in \mathcal{S}_\infty$ ,  $E_n \in \mathcal{S}_\infty$ ,  $I_E \in M$ ,  $I_{E_n} \in M$ ,  $n = 1, 2, \dots$ . 又设  $E_n \xrightarrow{I} E$ , 则  $I_{E_n} \xrightarrow{I} I_E$  当且仅当对任意的  $A \in \mathcal{S}_{CF}$  一致地有

$$\sum_{j=1}^k j E_n(\mu: \mu(A) = j) \rightarrow 0, (k \rightarrow \infty),$$

也就是说级数  $I_{x_n}(A) = \sum_{j=1}^n jE_n(\mu: \mu(A)=j)$  对  $n$  一致收敛。

**证明 必要性** 设  $A \in \mathcal{A}$ 。如果  $I_{x_n} \xrightarrow{I} I_x$ , 则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} I_{x_n}(A) = I_x(A).$$

给定  $\varepsilon > 0$ , 选取  $k_0$  使

$$\sum_{j > k_0} jE(\mu: \mu(A)=j) < \varepsilon,$$

于是

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j > k_0} jE_n(\mu: \mu(A)=j) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} (I_{x_n}(A) - \sum_{j \leq k_0} jE_n(\mu: \mu(A)=j)) \\ &= I_x(A) - \sum_{j \leq k_0} jE(\mu: \mu(A)=j) \\ &= \sum_{j > k_0} jE(\mu: \mu(A)=j) < \varepsilon, \end{aligned}$$

这就是说, 存在  $n_0$ , 使

$$\sum_{j > k_0} jE_n(\mu: \mu(A)=j) < \varepsilon$$

对一切  $n \geq n_0$  成立, 所以  $\sum_{j=1}^n jE_n(\mu: \mu(A)=j)$  关于  $n$  一致收敛。

**充分性** 设  $A \in \mathcal{A}$ ,  $\varepsilon > 0$  任意给定。则

$$\begin{aligned} |I_{x_n}(A) - I_x(A)| \\ \leq \sum_{j > k} jE_n(\mu: \mu(A)=j) + \sum_{j > k} jE(\mu: \mu(A)=j) \\ + \left| \sum_{j \leq k} jE_n(\mu: \mu(A)=j) - \sum_{j \leq k} jE(\mu: \mu(A)=j) \right|, \end{aligned}$$

由引理的条件可选取  $k_0$  使

$$\sum_{j > k_0} jE_n(\mu: \mu(A)=j) < \varepsilon, \quad n=1, 2, \dots,$$

$$\sum_{j > k_0} jE(\mu: \mu(A)=j) < \varepsilon,$$

因为  $A \in \mathcal{A}$ , 所以

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |I_{x_n}(A) - I_x(A)|$$

$$\leq 2\varepsilon + \limsup_{n \rightarrow \infty} \left| \sum_{j \in I_n} j E_n(\mu: \mu(A) = j) - \sum_{j \in I_n} j E(\mu: \mu(A) = j) \right| < 2\varepsilon,$$

又由  $\mathcal{G}_n$  的定义显然可推出  $\mathcal{G}_n = \mathcal{G}_{I_n}$ , 因此

$$I_n \xrightarrow{i} I.$$

下面我们研究  $\mathcal{G}_n$  中元素的Campbell测度的收敛性, 这与点过程的收敛性有直接的关系。为此先作一些记号上的说明并给出一些引理。

25. 设  $(X, \rho_X)$  与  $(Y, \rho_Y)$  是两个可分完备距离空间, 定义  $X \times Y$  上的距离如下

$$\rho_{X \times Y}((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \rho_X(x_1, x_2) + \rho_Y(y_1, y_2),$$

其中  $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in X \times Y$ . 于是  $(X \times Y, \rho_{X \times Y})$  是可分完备距离空间。

$(X \times Y, \rho_{X \times Y})$  中的集合  $C$  是有界的, 当且仅当存在  $(X, \rho_X)$  中的有界集  $A$  及  $(Y, \rho_Y)$  中的有界集  $B$  使  $C \subset A \times B$ .

分别以  $\mathcal{A}(X), \mathcal{A}(Y), \mathcal{A}(X \times Y)$  记  $(X, \rho_X), (Y, \rho_Y), (X \times Y, \rho_{X \times Y})$  中的Borel集类, 则  $\mathcal{A}(X \times Y) = \mathcal{A}(X) \times \mathcal{A}(Y)$ ; 又分别以  $\mathcal{B}(X), \mathcal{B}(Y), \mathcal{B}(X \times Y)$  记相应的有界Borel集类。

这样我们便有了如下的距离空间:

$$(X \times N, \rho_{X \times N}), (N \times \mathcal{G}_n, \rho_{N \times \mathcal{G}_n}), (X \times N^d, \rho_{X \times N^d}),$$

$$(N^d \times \mathcal{G}_n^d, \rho_{N^d \times \mathcal{G}_n^d}), (N^d \times \mathcal{G}_m, \rho_{N^d \times \mathcal{G}_m}),$$

这些空间以后我们将随便采用, 其意义非常明显。

26. 对于  $(N, \rho_N)$  上的测度  $H$ , 在前面我们已定义了  $H$  的Campbell测度  $\mathcal{G}_H$ , 对于  $A \in \mathcal{A}$  及  $Y \in N$ , 有

$$\mathcal{G}_H(A \times Y) = \int \mu \times \delta_\mu(A \times Y) H(d\mu).$$

对于任意的  $\mu \in N$ ,  $\mu \times \delta_\mu$  实际上是可分完备距离空间  $(X \times N, \rho_{X \times N})$  上的计数测度。因为对任意的  $A \in \mathcal{A}$  及  $Y \in N$  有

$$\mu \times \delta_\mu(A \times Y) = \mu(A) \delta_\mu(Y) \in \mathbb{Z}_+,$$

于是如果我们以  $(X \times N, \rho_{X \times N})$  取代  $(X, \rho_X)$ , 新的计数测度空间, 按照 §.6 关于记号的约定, 即为  $(N(X \times N), N(X \times N))$ , 而相应的在局部弱收敛意义下的距离空间, 记作

$$(N(X \times N), \rho_{N(X \times N)}).$$

这些记号比较复杂。不过上述记号只在本节使用, 以后不再用到。但是本节的结果今后是有用的。

由上所述,  $\mu \times \delta_\mu \in N(X \times N)$ 。不仅如此, 下面的引理指出,  $\mu \mapsto \mu \times \delta_\mu$  还是  $(N, \rho_N)$  到  $(N(X \times N), \rho_{N(X \times N)})$  中的连续映象。为此先证明一个预备性的引理。

27. 引理 设  $f(a, \mu)$  是  $(X \times N, \rho_{X \times N})$  上的有界连续函数并且有有界支集, 则对任意的  $E \in \mathcal{G}_n$ ,

$$g(a) = \int f(a, \mu) E(d\mu)$$

是 $(X, \rho_X)$ 上的有界连续函数, 且有有界支承。

**证明** 由于 $(N, \rho_N)$ 是有界距离空间, 故存在 $A \in \mathcal{B}$ 使 $\tilde{f}(a, \mu)$ 的支承含在 $(X \times N, \rho_{X \times N})$ 中的有界集 $A \times N$ 之内。从而

$$g(a) = \int f(a, \mu) B(d\mu)$$

的支承在 $A$ 之内,  $g(a)$ 显然有界连续。

**28. 引理** 映射 $\mu \mapsto \mu \times \delta_\mu$ 是连续的。

**证明** 显然 $\mu \mapsto \delta_\mu$ 是 $(N, \rho_N)$ 到 $(\mathcal{E}_+, \rho_{\mathcal{E}_+})$ 的连续映射, 于是 $(\mu, \delta_\mu)$ 是 $(N, \rho_N)$ 到 $(N \times \mathcal{E}_+, \rho_{N \times \mathcal{E}_+})$ 的连续映射。于是我们只须证明

$$(\mu, \delta_\mu) \mapsto \mu \times \delta_\mu$$

是 $(N \times \mathcal{E}_+, \rho_{N \times \mathcal{E}_+})$ 到 $(N(X \times N), \rho_{N(X \times N)})$ 的连续映射。

设 $\mu_n \Rightarrow \mu$ ,  $f(a, \mu)$ 是 $(X \times N, \rho_{X \times N})$ 上的任意一个具有有界支承的有界连续函数。命

$$g_n(a) = \int f(a, \lambda) \delta_{\mu_n}(d\lambda), \quad n = 1, 2, \dots,$$

$$g(a) = \int f(a, \lambda) \delta_\mu(d\lambda),$$

由引理27, 如果 $f(a, \lambda)$ 的支承含在 $A \times N$ 中,  $A \in \mathcal{B}$ , 则 $g_n(a)$ 和 $g(a)$ 的支承含在 $A$ 之内。不失一般性, 可设 $A$ 是 $(X, \rho_X)$ 中的闭集。

由于 $\mu_n \Rightarrow \mu$ , 由定理1.24, 对任给的 $\epsilon > 0$ , 存在 $A$ 的紧子集 $K_{A, \epsilon}$ 使

$$\sup_n \mu_n(A \setminus K_{A, \epsilon}) < \epsilon, \quad n = 1, 2, \dots,$$

由此可知

$$\left| \int_{A \setminus K_{A, \epsilon}} g_n(a) \mu_n(da) - \int_{A \setminus K_{A, \epsilon}} g(a) \mu_n(da) \right| \\ \leq 2C \sup_n \mu_n(A \setminus K_{A, \epsilon}) < 2C\epsilon,$$

其中 $C$ 是 $g(a), g_n(a), n = 1, 2, \dots$ 的共同上界。

因为 $g(a)$ 有界连续且有界支承, 故由 $\mu_n \Rightarrow \mu$ 可知, 当 $n$ 充分大时

$$\left| \int g(a) \mu_n(da) - \int g(a) \mu(da) \right| < \epsilon.$$

再根据 $g(a), g_n(a), n = 1, 2, \dots$ 的定义可推知 $g_n(a), n = 1, 2, \dots$ 在紧集 $K_{A, \epsilon}$ 上一致收敛于 $g(a)$ 。由此可知当 $n$ 充分大时

$$\left| \int_{K_{A, \epsilon}} g_n(a) \mu_n(da) - \int_{K_{A, \epsilon}} g(a) \mu_n(da) \right| < \epsilon.$$

综上所述, 可知当 $n$ 充分大时有

$$\left| \int f(a, \lambda) \mu_n \times \delta_{\mu_n}(da \times d\lambda) - \int f(a, \lambda) \mu \times \delta_\mu(da \times d\lambda) \right| \\ \leq \left| \int_{K_{A, \epsilon}} g_n(a) \mu_n(da) - \int_{K_{A, \epsilon}} g(a) \mu_n(da) \right| + \left| \int_{A \setminus K_{A, \epsilon}} g_n(a) \mu_n(da) \right|$$

$$-\int_{A \setminus X_{A, \varepsilon}} g(a) \mu_n(da) \Big| + \Big| \int g(a) \mu_n(da) - \int g(a) \mu(da) \Big| < 3\varepsilon,$$

这说明

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int f(a, \lambda) \mu_n \times \delta_{\mu_n}(da \times d\lambda) = \int f(a, \lambda) \mu \times \delta_\mu(da \times d\lambda),$$

也就是说

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \rho_{N(X \times N)}(\mu_n \times \delta_{\mu_n}, \mu \times \delta_\mu) = 0.$$

29. 如同定义25,  $(N(X \times N), \rho_{N(X \times N)})$  是以  $(X \times N, \rho_{X \times N})$  为相空间的计数测度空间, 这当然是有界距离空间。因为我们只是以  $X \times N$  取代了  $X$ , 以  $N(X \times N)$  取代了  $N$  而已。

现在令

$$N^d(X \times N) = N(X \times N) \setminus \{0\},$$

这里 0 表示  $X \times N$  上的零测度。因此可以按照 §3 的方法定义距离空间  $(N^d(X \times N), \rho_{N^d(X \times N)})$ , 继而定义  $(\mathcal{E}_m(X \times N), \rho_{\mathcal{E}_m(X \times N)})$  以及  $(\mathcal{E}_m(X \times N), \rho_{\mathcal{E}_m(X \times N)})$ 。

设  $E \in \mathcal{E}_m$ , 在映射  $\mu \sim \mu \times \delta_\mu$  之下, 由  $E$  所诱导的测度, 记为  $\bar{E}$ 。我们指出,  $\bar{E} \in \mathcal{E}_m(X \times N)$ , 事实上, 有

$$\bar{E}(\{0\}) = E(\mu: \mu \times \delta_\mu = 0) = E(\{0\}) = 0.$$

现设  $C$  是  $(X \times N, \rho_{X \times N})$  中的有界集, 由引理17, 存在  $A \in \mathcal{A}$  使

$$\begin{aligned} \bar{E}(\lambda: \lambda \in N(X \times N), \lambda(C) > 0) \\ \leq E(\mu: \mu \in N, \mu \times \delta_\mu(A \times N) > 0) = E(\mu: \mu(A) > 0) < \infty, \end{aligned}$$

故  $\bar{E} \in \mathcal{E}_m(X \times N)$ 。

30. 引理 设  $E \in \mathcal{E}_m, E_n \in \mathcal{E}_m, n = 1, 2, \dots$ , 如果

$$E_n \xrightarrow{I} E,$$

则  $\bar{E}_n \xrightarrow{I} \bar{E}$ 。

证明 设  $f(\lambda)$  是  $(N^d(X \times N), \rho_{N^d(X \times N)})$  上的有界连续函数具有有界支集。我们要证,

$$\int f(\lambda) \bar{E}_n(d\lambda) \longrightarrow \int f(\lambda) \bar{E}(d\lambda), \quad (n \rightarrow \infty)$$

由引理17, 存在  $X \times N$  上的有界集  $C$ , 使  $f$  在集合

$$\{\lambda: \lambda \in N(X \times N), \lambda(C) > 0\}$$

之外为 0。由于  $C$  是  $X \times N$  上的有界集, 故存在  $A \in \mathcal{A}$ , 使  $C \subset A \times N$ 。于是

$$\{\lambda: \lambda \in N(X \times N), \lambda(C) > 0\} \subset \{\lambda: \lambda \in N(X \times N), \lambda(A \times N) > 0\},$$

现今

$$g(\mu) = f(\mu \times \delta_\mu),$$

由引理28,  $g(\mu)$  在  $(N, \rho_N)$  上连续, 而且支集在  $\{\mu: \mu \in N, \mu(A) > 0\}$  之内。由  $E_n \xrightarrow{I} E$  及引

理19得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int g(\mu) E_n(d\mu) = \int g(\mu) E(d\mu),$$

然而

$$\int g(\mu) E_n(d\mu) = \int f(\lambda) E_n(d\mu), \quad n=1, 2, \dots,$$

$$\int g(\mu) E(d\mu) = \int f(\lambda) E(d\lambda),$$

所以欲证之等式成立。

下面的定理31是本节的主要结果，也是今后必须用到的。它指出了在某些条件下，Campbell测度局部弱收敛的充要条件。

设  $E \in \mathcal{E}_\infty$ ， $E$  的Campbell测度可以表为

$$\mathcal{E}_E(\cdot) = \int \mu \times \mathcal{E}_\mu(\cdot) E(d\mu).$$

由定理5， $\mathcal{E}_E$  总是  $\sigma$  有限的。我们曾指出

$$I_E(A) = \mathcal{E}_E(A \times N), \quad A \in \mathcal{A},$$

一般说来， $I_E(\cdot)$  不一定是  $(X, \rho_X)$  上的局部有限测度。如果  $I_E \in M$ ，则称  $E$  的测度是局部有限的。

显然，当  $E \in \mathcal{E}_\infty, I_E \in M$  时， $\mathcal{E}_E(\cdot)$  是  $(X \times N, \rho_{X \times N})$  上的局部有限测度，即

$$\mathcal{E}_E \in N(X \times N).$$

**31. 定理** 设  $E \in \mathcal{E}_\infty, I_E \in M, E_n \in \mathcal{E}_\infty, I_{E_n} \in M, n=1, 2, \dots$ 。在这些条件之下，

$$\mathcal{E}_{E_n} \xrightarrow{I} \mathcal{E}_E \text{ 当且仅当}$$

$$E_n \xrightarrow{I} E, \quad I_{E_n} \xrightarrow{I} I_E.$$

**证明** 充分性 设  $C$  是  $(X \times N, \rho_{X \times N})$  中的有界集，则存在  $A \in \mathcal{A}_{CS}$ ，使  $C \subset A \times N$ 。由于

$$I_{E_n} \xrightarrow{I} I_E, \text{ 由引理24对所有 } n \text{ 一致地有}$$

$$\sum_{i>h} j E_n(\mu: \mu(A)=j) \longrightarrow 0, \quad (h \rightarrow \infty),$$

但是

$$\begin{aligned} \sum_{i>h} j E_n(\lambda: \lambda(C)=j) &= \int_{\{\lambda(C)>h\}} \lambda(C) E_n(d\lambda) \\ &\leq \int_{\{\mu(A)>h\}} \mu(A) E_n(d\mu) = \sum_{i>h} j E_n(\mu: \mu(A)=j), \end{aligned}$$

所以对  $n$  一致地有

$$\sum_{i>h} j E_n(\lambda: \lambda(C)=j) \longrightarrow 0, \quad (h \rightarrow \infty),$$

仍由引理24知  $I_{E_n} \xrightarrow{I} I_E$ 。但当  $A \in \mathcal{A}, Y \in N$  时

$$I_E(A \times Y) = \int \lambda(A \times Y) E(d\lambda)$$

$$= \int \mu \times \delta_\mu(A \times Y) B(d\mu) = \mathcal{E}_X(A \times Y),$$

所以

$$I_{\mathcal{E}} = \mathcal{E}_X, \quad I_{\mathcal{E}_n} = \mathcal{E}_{X_n}, \quad n=1, 2, \dots,$$

因此得  $\mathcal{E}_{X_n} \xrightarrow{I} \mathcal{E}_X$ .

必要性 现设  $\mathcal{E}_{X_n} \xrightarrow{I} \mathcal{E}_X$ , 要证明

$$I_{X_n} \xrightarrow{I} I_X, \quad E_n \xrightarrow{I} E.$$

分为以下三步进行:

1. 证明  $I_{X_n} \xrightarrow{I} I_X$ . 如果  $f$  是  $(X, \rho_X)$  上的有界连续函数, 具有有界支承  $A \in \mathcal{F}$ . 令

$$g(a, \mu) = f(a), \quad (a, \mu) \in X \times N,$$

则  $g(a, \mu)$  是  $(X \times N, \rho_{X \times N})$  上的有界连续函数, 支承含在  $A \times N$  之内. 由  $\mathcal{E}_{X_n} \xrightarrow{I} \mathcal{E}_X$  得

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \int f(a) I_{X_n}(da) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int g(a, \mu) \mathcal{E}_{X_n}(da \times d\mu) \\ &= \int g(a, \mu) \mathcal{E}_X(da \times d\mu) = \int f(a) I_X(da), \end{aligned}$$

从而  $I_{X_n} \xrightarrow{I} I_X$ .

2. 任设  $A \in \mathcal{F}$ , 证明对  $n$  一致地有

$$\sum_{i \geq k} j E_n(\mu: \mu(A) = f) \longrightarrow 0, \quad (k \rightarrow \infty).$$

设  $f \in \mathcal{F}_+$ , 而且  $1_A \leq f \leq 1$ . 令

$$g(a, b) = \int f(a) f(b) \mu(da),$$

则  $g$  是  $(X \times N, \rho_{X \times N})$  上的连续函数, 而且具有有界支承. 事实上, 如果  $f$  的支承是  $B$ , 则  $g$  的支承是  $B \times N$ . 对于不同的  $x > 0$ ,  $g^{-1}(x)$  是互不相交的, 从而  $\mathcal{E}_X(g^{-1}(x)) > 0$  至多对可数多个  $x > 0$  成立. 然而

$$\mathcal{E}_X(\partial[g^{-1}(x, \infty)]) \leq \mathcal{E}_X(g^{-1}(\partial(x, \infty))) = \mathcal{E}_X(g^{-1}(x)),$$

因此可选序  $\{x_m\}$ , 使  $x_m \uparrow \infty$  且对所有的  $m$ , 都有

$$\mathcal{E}_X(\partial[g^{-1}(x_m, \infty)]) = 0,$$

即  $g^{-1}(x_m, \infty)$  是  $\mathcal{E}_X$  连续集, 而且在  $(X \times N, \rho_{X \times N})$  中有界, 事实上它含在  $B \times N$  之内. 因

为  $\mathcal{E}_{X_n} \xrightarrow{I} \mathcal{E}_X$ , 故对任一  $m$  都有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{E}_{X_n}(g^{-1}(x_m, \infty)) = \mathcal{E}_X(g^{-1}(x_m, \infty)).$$

现设  $\varepsilon > 0$  任意给定. 因为  $(x_m, \infty) \downarrow \emptyset$ , 从而存在  $m_0$ , 使

$$\mathcal{E}_X(g^{-1}(x_{m_0}, \infty)) < \varepsilon/2,$$

再选  $n_0$ , 使当  $n > n_0$  时

$$|\mathcal{G}_{x_n}(g^{-1}(x_{m_0}, \infty)) - \mathcal{G}_x(g^{-1}(x_{m_0}, \infty))| < \varepsilon/2,$$

适当增大 $m_0$ , 不妨认为对一切 $n$ 都有

$$\mathcal{G}_{x_n}(g^{-1}(x_{m_0}, \infty)) < \varepsilon.$$

现在应用定理3的反演公式, 我们有

$$\begin{aligned} & \sum_{j > x_{m_0}} j E_n(\mu: \mu(A) = j) \\ &= \sum_{j > x_{m_0}} j (j^{-1} \mathcal{G}_{x_n}(A \times (\mu: \mu(A) = j))) \\ &= \sum_{j > x_{m_0}} \mathcal{G}_{x_n}(A \times (\mu: \mu(A) = j)) \\ &= \mathcal{G}_{x_n}(A \times (\mu: \mu(A) > x_{m_0})) \\ &\leq \mathcal{G}_{x_n}(g^{-1}(x_{m_0}, \infty)) < \varepsilon, \end{aligned}$$

从而对 $n \rightarrow \infty$ 地有

$$\sum_{j > k} j E_n(\mu: \mu(A) = j) \rightarrow 0, \quad (k \rightarrow \infty).$$

3. 证明 $E_n \xrightarrow{I} E$ . 由于 $E, E_n \in \mathcal{E}_\infty$ , 故存在 $P \in \mathcal{P}_{IN}, P_n \in \mathcal{P}_{IN}$ , 使

$$P = E, \quad P_n = E_n, \quad n = 1, 2, \dots,$$

由于 $I_{P_n} = I_{P_n} = I_{E_n}$ , 故由已证明的1知

$$I_{P_n} \xrightarrow{I} I_P.$$

现在我们要证明 $\{P_n\}$ 在 $(\mathcal{E}_\infty, \rho_{\mathcal{E}_\infty})$ 中是相对紧的。事实上, 由于 $I_{P_n} \xrightarrow{I} I_P$ , 故 $\{I_{P_n}\}$ 在 $(N, \rho_N)$ 中相对紧。由定理 I.24知, 对任意给定的闭集 $A \in \mathcal{A}$ 以及 $\varepsilon > 0$ , 存在 $A$ 的紧子集 $A_\varepsilon$ 使

$$\sup_n I_{P_n}(A) \approx \sup_n \sum_{j=1}^{\infty} j P_n(\mu: \mu(A) = j) < \infty, \quad (1)$$

$$\sup_n I_{P_n}(A \setminus A_\varepsilon) < \varepsilon, \quad (2)$$

由(1)知, 存在正整数 $n_{A, \varepsilon}$ 使

$$\sup_n P_n(\mu: \mu(A) \geq n_{A, \varepsilon}) < \varepsilon,$$

由(2)推得

$$\sup_n P_n(\mu: \mu(A \setminus A_\varepsilon) \geq 1) < \varepsilon,$$

从而根据定理 I.41,  $\{P_n\}$ 是相对紧的。

于是存在 $\{n\}$ 的子序列 $\{n_j\}$ 及 $P' \in \mathcal{P}_N$ , 使

$$P_{n_j} \xrightarrow{w} P',$$



又由推论11得  $P' \in \mathcal{P}_{IN}$ . 因此又存在  $E' \in \mathcal{E}_m$ , 使  $P' = E'$ . 根据引理21,  $P_{n_j} \xrightarrow{w} P'$  等价于

$$E_{n_j} \xrightarrow{1} E'.$$

现证明  $I_{E'} \in M$ . 设  $A \in \mathcal{B}_{\mathcal{E}_E}$ , 由引理23得

$$I_{E'}(A) \leq \liminf_{n_j} I_{E_{n_j}}(A) < \infty,$$

由于对任意的  $B \in \mathcal{B}$ , 总存在  $A \supset B$  并且  $A \in \mathcal{B}_{\mathcal{E}_E}$ , 所以  $I_{E'} \in M$ .

由引理24得  $I_{E_{n_j}} \xrightarrow{1} I_{E'}$ , 又由于本定理的充分性部分可得  $\mathcal{E}_{E_{n_j}} \xrightarrow{1} \mathcal{E}_{E'}$ . 由局部弱收敛极限的唯一性知  $\mathcal{E}_E = \mathcal{E}_{E'}$ , 最后由Campbell测度的唯一性定理4及  $E \in \mathcal{E}_m, E' \in \mathcal{E}_m$  知  $E = E'$ , 证毕.

## §6. (弱)无穷小三角序列的收敛

32. 定义 设  $\{P_{n_j}, n \in \mathbb{Z}_+, 1 \leq j \leq h_n\} \subset \mathcal{P}_X$ . 如果对任意的  $A \in \mathcal{B}$  有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \max_{1 \leq j \leq h_n} P_{n_j}(\mu(A) > 0) = 0$$

则称  $\{P_{n_j}\}$  是(弱)无穷小三角序列. 今后简称为无穷小三角序列.

显然强无穷小三角序列必也是(弱)无穷小三角序列. 下面我们要将定理13推广, 只有这样推广, 才能完全解决无穷小三角序列的收敛性问题. 首先证明一个引理, 这个引理将引理6的条件减弱了.

33. 引理 设  $\Gamma \subset \mathcal{B}$  是  $(X, \rho_X)$  上的环,  $L_q(\Gamma) = \mathcal{B}$ . 又设对任意的  $A \in \mathcal{B}$ , 存在  $B \in \Gamma$  使  $A \subset B$ . 如果  $P \in \mathcal{P}_N$ , 则  $P \in \mathcal{P}_{IN}$  当且仅当对  $\Gamma$  中任意互不相交的  $A_1, \dots, A_m \in \Gamma$ ,  $P_{A_1}, \dots, P_{A_m}$  是  $\mathbb{Z}^m$  值的无穷可分分布.

证明 只证充分性. 设  $A_1, \dots, A_m \in \Gamma$  且互不相交. 由于  $P_{A_1}, \dots, P_{A_m}$  无穷可分, 故存在  $\mathbb{Z}^m$  上的有限测度  $F$ , 使  $P_{A_1}, \dots, P_{A_m} = F_X$ . 由于  $F$  依赖于  $A_1, \dots, A_m$ , 故记之为  $F^{A_1, \dots, A_m}$ .

现设

$$\tilde{N} = \bigcup_{A_1, \dots, A_m} N_{A_1, \dots, A_m}$$

其中  $A_1, \dots, A_m$  跑遍  $\Gamma$  中一切互不相交的有限族. 则由引理 I.4 知  $\tilde{N}$  是代数并且  $\sigma(\tilde{N}) = N$ .

考虑  $\tilde{N}$  上的集函数  $B$ , 满足条件, 对于互不相交的  $A_1, \dots, A_m \in \Gamma$ , 有

$$E(\mu(A_1) = h_1, \dots, \mu(A_m) = h_m)$$

$$= F^{A_1, \dots, A_m}(h_1, \dots, h_m),$$

凡  $h_1, \dots, h_m \in \mathbb{Z}_+$ .

容易证明  $E$  是代数  $\tilde{\mathbb{N}}$  上的有限测度, 于是可把  $E$  扩张为  $\mathbb{N}$  上的测度, 仍记为  $E$ . 不失一般性, 可设  $E(\{0\}) = 0$ .

现设  $A \in \mathcal{A}$  任意. 由引理条件, 存在  $B \in \Gamma$  使  $A \subset B$ , 从而

$$\begin{aligned} E(\mu: \mu(A) > 0) &\leq E(\mu: \mu(B) > 0) \\ &= \sum_{h \in \mathbb{N}} F^B(h) < \infty, \end{aligned}$$

这说明  $E \in \mathcal{E}_\infty$ . 并且对任意互不相交的  $A_1, \dots, A_m \in \Gamma$  都有

$$P_{A_1, \dots, A_m} = (P'_E)_{A_1, \dots, A_m},$$

所以由推论 1.5 知  $P = P'_E$ , 即  $P$  为无穷可分分布.

下面的定理是定理 13 的推广. 它指出: 无穷小三角序列如果弱收敛, 则一定收敛于某个无穷可分分布.

**84. 定理**  $P \in \mathcal{P}_{IN}$  的充分必要条件为: 存在无穷小三角序列  $\{P_n\}$ , 使

$$\bigstar_{1 \leq j \leq n} P_n \xrightarrow{w} P.$$

**证明 必要性** 设  $P \in \mathcal{P}_{IN}$ , 令

$$P_n = \mathcal{J}\overline{P}, \quad n \in \mathbb{Z}_+, \quad 1 \leq j \leq n,$$

则显然

$$\bigstar_{1 \leq j \leq n} P_n \xrightarrow{w} P.$$

往证如上定义的  $\{P_n\}$  是无穷小三角序列. 事实上, 设  $A \in \mathcal{A}$ , 由于

$$\begin{aligned} \min_{1 \leq j \leq n} P_n(\mu: \mu(A) = 0) &= \mathcal{J}\overline{P}(\mu: \mu(A) = 0) \\ &= \mathcal{J}P(\mu: \mu(\overline{A}) = 0), \end{aligned}$$

又由定理 II.31 的 5) 知

$$P(\mu: \mu(A) = 0) = \exp\{-\tilde{P}(\mu: \mu(A) > 0)\} > 0,$$

从而当  $n \rightarrow \infty$  时有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \min_{1 \leq j \leq n} P_n(\mu: \mu(A) = 0) = 1,$$

亦即

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \max_{1 \leq j \leq n} P_n(\mu: \mu(A) > 0) = 0,$$

所以  $\{P_n\}$  确是无穷小三角序列.

反之, 设  $\{P_n\}$  是无穷小三角序列, 并且

$$\bigstar_{1 \leq j \leq n} P_n \xrightarrow{w} P,$$

则由推论 9, 对一切互不相交的  $A_1, \dots, A_m \in \mathcal{A}_{CF}$  有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|(\ast_{1 \leq j \leq h_n} P_{n_j})_{A_1, \dots, A_m} - P_{A_1, \dots, A_m}\| = 0,$$

于是由定理13知  $P_{A_1, \dots, A_m}$  是无穷可分的。

现在由引理 I.44,  $\mathcal{A}_{CP}$  是环, 而且

$$L_{\sigma}(\mathcal{A}_{CP}) = \mathcal{B},$$

又由引理 I.50, 对任意  $A \in \mathcal{A}$ , 存在  $B \in \mathcal{A}_{CP}$  使

$$A \subset B.$$

故应用引理33即知  $P \in \mathcal{P}_{IN}$ .

**38. 定理** 设  $P \in \mathcal{P}_{IN}$ ,  $\{P_n\}$  是无穷小三角序列。则下述命题等价,

$$1) \ast_{1 \leq j \leq h_n} P_n \xrightarrow{w} P;$$

$$2) \ast_{1 \leq j \leq h_n} P_{n_j} \xrightarrow{w} P;$$

$$3) \sum_{1 \leq j \leq h_n} P_{n_j}((\cdot) \setminus \{0\}) \xrightarrow{I} P.$$

**证明** 1)  $\Rightarrow$  3). 如果1)成立, 则对互不相交的  $A_1, \dots, A_m \in \mathcal{A}_{CP}$ , 由推论9得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|(\ast_{1 \leq j \leq h_n} (P_{n_j})_{A_1, \dots, A_m} - P_{A_1, \dots, A_m})\| = 0, \quad (1)$$

但因为

$$P = \mathcal{B} P((\cdot) \setminus \{0\}),$$

故由定理 I.21知

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\| \sum_{1 \leq j \leq h_n} (P_{n_j})_{A_1, \dots, A_m}((\cdot) \setminus \{0, \dots, 0\}) - P_{A_1, \dots, A_m}((\cdot) \setminus \{0, \dots, 0\}) \right\| = 0, \quad (2)$$

于是由引理20得

$$\sum_{1 \leq j \leq h_n} P_{n_j}((\cdot) \setminus \{0\}) \xrightarrow{I} P. \quad (3)$$

这就是3)。

3)  $\Rightarrow$  1). 反之, 设3)成立。根据定理 I.31的8)得

$$I_P = I_{\mathcal{B}P},$$

从而由引理 I.45知  $\mathcal{A}_{CP} = \mathcal{A}_{CP}$ 。于是由引理20, 对任意互不相交的  $A_1, \dots, A_m \in \mathcal{A}_{CP}$ ,

上面的(1), (2), (3)等价, 即3)  $\Rightarrow$  1)。

又因为

$$\ast_{1 \leq j \leq h_n} P_{n_j} = \mathcal{B} \sum_{1 \leq j \leq h_n} P_{n_j}((\cdot) \setminus \{0\}),$$

由引理21即知2)与3)等价。

**39. 定理** 设  $P \in \mathcal{P}_{IN}$ ,  $I_P \in M$ , 又设  $\{P_n\}$  是无穷小三角序列,  $I_{P_n} \in M$ 。则

$$\sum_{1 \leq j \leq k_n} P_{n,j} \xrightarrow{w} P, \quad \sum_{1 \leq j \leq k_n} I_{P_{n,j}} \xrightarrow{I} I_P,$$

当且仅当

$$\sum_{1 \leq j \leq k_n} \mathcal{G}_{P_{n,j}} \xrightarrow{I} \mathcal{G}_P.$$

**证明** 由定理35,

$$\sum_{1 \leq j \leq k_n} P_{n,j} \xrightarrow{w} P$$

等价于

$$\sum_{1 \leq j \leq k_n} P_{n,j} \xrightarrow{w} P,$$

又等价于

$$\sum_{1 \leq j \leq k_n} P_{n,j}((\cdot) \setminus \{0\}) \xrightarrow{I} P,$$

然而

$$I_P = I_P, \quad I \sum_{1 \leq j \leq k_n} P_{n,j}((\cdot) \setminus \{0\}) = \sum_{1 \leq j \leq k_n} I_{P_{n,j}},$$

应用定理31, 令

$$E_n = \sum_{1 \leq j \leq k_n} P_{n,j}((\cdot) \setminus \{0\}), \quad n=1, 2, \dots,$$

$$E = P,$$

并注意

$$\sum_{1 \leq j \leq k_n} \mathcal{G}_{P_{n,j}} = \mathcal{G} \sum_{1 \leq j \leq k_n} P_{n,j}((\cdot) \setminus \{0\}),$$

即得欲证.

## §7. 收敛于Poisson过程

**37. 引理** 设  $\lambda \in M$ . 则

$$\mathcal{G}_\lambda = \mathcal{G}_{CO_\lambda},$$

其中  $Q_\lambda$  是由  $X$  至  $N$  的映射  $f: a \mapsto \delta_a$  所诱导的测度,  $Q_\lambda = \lambda f^{-1}$ .

**证明** 由  $\mathcal{G}_\lambda$  的定义知,  $A \in \mathcal{G}_\lambda$  当且仅当

$$\lambda(\partial A) = 0, \quad A \in \mathcal{G}_\lambda$$

再由  $\mathcal{G}_{CO_\lambda}$  的定义知,  $A \in \mathcal{G}_{CO_\lambda}$  当且仅当

$$Q_\lambda(\mu: \mu(\partial A) > 0) = 0, \quad A \in \mathcal{G}_\lambda$$

于是  $A \in \mathcal{G}_{CO_\lambda}$  当且仅当

$$I_{CO_\lambda}(\partial A) = \int \mu(\partial A) Q_\lambda(d\mu) = \lambda(\partial A) = 0.$$

38. 定理 设  $\lambda \in M$ ,  $\{P_n\}$  是无穷小三角序列. 则

$$\bigstar_{1 \leq j \leq k_n} P_{n_j} \xrightarrow{w} P_\lambda$$

当且仅当对任意的  $A \in \mathcal{A}$  有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{1 \leq j \leq k_n} P_{n_j}(\mu: \mu(A) > 1) = 0,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{1 \leq j \leq k_n} P_{n_j}(\mu: \mu(A) = 1) = \lambda(A).$$

证明 由定理 35 知

$$\bigstar_{1 \leq j \leq k_n} P_{n_j} \xrightarrow{w} P_\lambda$$

当且仅当

$$\sum_{1 \leq j \leq k_n} P_{n_j}((\cdot) \setminus \{0\}) \xrightarrow{1} P_\lambda.$$

因为对于 Poisson 过程  $P_\lambda$  而言有  $P_\lambda = Q_\lambda$ , 所以上式等价于

$$\sum_{1 \leq j \leq k_n} P_{n_j}((\cdot) \setminus \{0\}) \xrightarrow{1} Q_\lambda.$$

但由引理 20,  $\sum_{1 \leq j \leq k_n} P_{n_j}((\cdot) \setminus \{0\}) \xrightarrow{1} Q_\lambda$  当且仅当对任意互不相交的  $A_1, \dots, A_m \in \mathcal{A} \cap \mathcal{C}_{0, \lambda}$ ,

有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\| \sum_{1 \leq j \leq k_n} (P_{n_j})_{A_1, \dots, A_m}((\cdot) \setminus \{0, \dots, 0\}) \right.$$

$$\left. - (Q_\lambda)_{A_1, \dots, A_m}((\cdot) \setminus \{0, \dots, 0\}) \right\| = 0.$$

命

$$e_0 = (0, \dots, 0), \quad e_1 = (1, 0, \dots, 0), \quad e_2 = (0, 1, 0, \dots, 0), \\ \dots, \quad e_m = (0, 0, \dots, 1, \dots).$$

则由  $Q_\lambda$  的定义知

$$(Q_\lambda)_{A_1, \dots, A_m}((\cdot) \setminus e_0) = \sum_{i=1}^m \lambda(A_i) \delta_{e_i},$$

因此  $\sum_{1 \leq j \leq k_n} P_{n_j}((\cdot) \setminus \{0\}) \xrightarrow{1} Q_\lambda$  等价于对任意互不相交的  $A_1, \dots, A_m \in \mathcal{A} \cap \mathcal{C}_{0, \lambda}$  有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\| \sum_{1 \leq j \leq k_n} (P_{n_j})_{A_1, \dots, A_m}((\cdot) \setminus e_0) - \sum_{i=1}^m \lambda(A_i) \delta_{e_i} \right\| = 0,$$

由定理 7, 上式等价于下面两个条件:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{1 \leq j \leq k_n} (P_{nj})_{A_1, \dots, A_m} ((\cdot) \setminus \{e_0, e_1, \dots, e_m\}) = 0, \quad (1)$$

和

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{1 \leq j \leq k_n} (P_{nj})_{A_1, \dots, A_m} (e_i) = \lambda(A_i), \quad 1 \leq i \leq m. \quad (2)$$

条件(1), (2)显然等价于

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{1 \leq j \leq k_n} P_{nj}(\mu: \mu(A_1 \cup \dots \cup A_m) > 1) = 0, \quad (3)$$

和

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{1 \leq j \leq k_n} P_{nj}(\mu: \mu(A_i) = 1) = \lambda(A_i), \quad 1 \leq i \leq m. \quad (4)$$

由于  $\mathcal{C}_{O_A}$  是环, (3), (4)又等价于: 对任意  $A \in \mathcal{C}_{O_A}$  有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{1 \leq j \leq k_n} P_{nj}(\mu: \mu(A) > 1) = 0,$$

和

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{1 \leq j \leq k_n} P_{nj}(\mu: \mu(A) = 1) = \lambda(A),$$

再由引理37, 定理得证。

**38. 定理** 设  $\{P_{nj}\}$  是无穷小三角序列,  $I_{P_{nj}} \in M$ , 又设  $\lambda \in M$  且

$$\sum_{1 \leq j \leq k_n} I_{P_{nj}} \xrightarrow{I} \lambda$$

则

$$\sum_{1 \leq j \leq k_n} P_{nj} \xrightarrow{w} P_\lambda$$

当且仅当对任意的  $A \in \mathcal{C}$  有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{1 \leq j \leq k_n} \mathcal{C}_{P_{nj}}(A \times \{\mu: \mu(A) > 1\}) = 0.$$

**证明** 必要性 由定理36, 在本定理已知的条件下,

$$\sum_{1 \leq j \leq k_n} P_{nj} \xrightarrow{w} P_\lambda$$

当且仅当

$$\sum_{1 \leq j \leq k_n} \mathcal{C}_{P_{nj}} \xrightarrow{I} \mathcal{C}_{O_A}.$$

现设  $A$  是  $(X, \rho_X)$  中的有界闭集。我们来证明:  $\{\mu: \mu(A) > 1\}$  是  $(N, \rho_N)$  中的闭集。

事实上, 如果  $\mu_n \xrightarrow{I} \mu$  且  $\mu_n(A) \geq 2, n = 1, 2, \dots$ , 则由定理 1.22(3)得

$$2 \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \mu_n(A) \leq \mu(A),$$

从而  $\mu(A) \geq 2$ , 即  $\{\mu: \mu(A) > 1\}$  是闭集。于是

$$A \times \{\mu: \mu(A) > 1\}$$

是  $(X \times N, \rho_{X \times N})$  中的闭集。从而由

$$\sum_{1 \leq j \leq h_n} \mathcal{G}_{r_{nj}} \xrightarrow{I} \mathcal{G}_{0_\lambda}$$

并应用定理 1.22 的 3) 知

$$\begin{aligned} & \limsup_{n \rightarrow \infty} \sum_{1 \leq j \leq h_n} \mathcal{G}_{r_{nj}}(A \times (\mu: \mu(A) > 1)) \\ & \leq \mathcal{G}_{0_\lambda}(A \times (\mu: \mu(A) > 1)) \leq \mathcal{G}_{0_\lambda}(X \times (\mu: \mu(A) > 1)) = 0, \end{aligned}$$

现设  $A \in \mathcal{A}$  任意, 以  $\bar{A}$  记  $A$  的闭包, 则

$$A \times \{\mu: \mu(A) > 1\} \subset \bar{A} \times \{\mu: \mu(\bar{A}) > 1\}$$

从而

$$\begin{aligned} & \limsup_{n \rightarrow \infty} \sum_{1 \leq j \leq h_n} \mathcal{G}_{r_{nj}}(A \times (\mu: \mu(A) > 1)) \\ & \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \sum_{1 \leq j \leq h_n} \mathcal{G}_{r_{nj}}(\bar{A} \times (\mu: \mu(\bar{A}) > 1)) = 0, \end{aligned}$$

必要性得证。

充分性 现设对任意的  $A \in \mathcal{A}$  有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{1 \leq j \leq h_n} \mathcal{G}_{r_{nj}}(A \times (\mu: \mu(A) > 1)) = 0,$$

由反演公式定理 3 知

$$\begin{aligned} & \sum_{1 \leq j \leq h_n} P_{r_{nj}}(\mu: \mu(A) > 1) = \sum_{1 \leq j \leq h_n} \sum_{l=1}^{\infty} P_{r_{nj}}(\mu: \mu(A) = l) \\ & = \sum_{1 \leq j \leq h_n} \sum_{l=1}^{\infty} l(I(l^{-1} \mathcal{G}_{r_{nj}}(A \times (\mu: \mu(A) = l)))) \\ & = \sum_{1 \leq j \leq h_n} \mathcal{G}_{r_{nj}}(A \times (\mu: \mu(A) > 1)) \longrightarrow 0, \quad (n \rightarrow \infty). \end{aligned}$$

现设  $A \in \mathcal{A}_\lambda$ , 则由

$$\begin{aligned} & \sum_{1 \leq j \leq h_n} P_{r_{nj}}(\mu: \mu(A) = 1) \\ & = \sum_{1 \leq j \leq h_n} I_{r_{nj}}(A) - \sum_{1 \leq j \leq h_n} \mathcal{G}_{r_{nj}}(A \times (\mu: \mu(A) > 1)), \end{aligned}$$

以及条件

$$\sum_{1 \leq j \leq h_n} I_{r_{nj}} \xrightarrow{I} \lambda$$

推得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{1 \leq j \leq h_n} P_{r_{nj}}(\mu: \mu(A) = 1) = \lambda(A),$$

从而由定理 26 得

$$\sum_{1 \leq j \leq h_n} P_{r_{nj}} \xrightarrow{w} P_\lambda.$$

## §8. 收敛于 Gauss-Poisson 过程

40. 定理 设  $P \in \mathcal{P}_{IN}$  是 Gauss-Poisson 分布, 而且

$$-\log \mathcal{W}_P(f) = \int (1 - \exp(-f(a))) \nu_1(da) \\ + \iint (1 - \exp(-f(a) - f(b))) \nu_2(da \times db), \quad f \in \mathcal{F}_{m+}.$$

其中  $\nu_1 \in M$ ,  $\nu_2$  是  $(X^2, \mathcal{X}^2)$  上的对称测度, 满足条件: 对任意的  $A \in \mathcal{A}$ ,  $\nu_2(A \times X) < \infty$ .  
命

$$\lambda(\cdot) = \nu_1(\cdot) + 2\nu_2(\cdot \times X).$$

现设  $\{P_{n_j}\}$  是无穷小三角序列, 则

$$\sum_{1 \leq j \leq h_n}^* P_{n_j} \xrightarrow{w} P$$

当且仅当对任意互不相交的  $A, B \in \mathcal{A}_{\lambda}$ , 有

- 1)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{1 \leq j \leq h_n} P_{n_j}(\mu: \mu(A) > 2) = 0$ ;
- 2)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{1 \leq j \leq h_n} P_{n_j}(\mu: \mu(A) = 1, \mu(B) = 0) = \nu_1(A) + 2\nu_2(A \times (A \cup B)^c)$ ;
- 3)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{1 \leq j \leq h_n} P_{n_j}(\mu: \mu(A) = 1, \mu(B) = 1) = 2\nu_2(A \times B)$ ;
- 4)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{1 \leq j \leq h_n} P_{n_j}(\mu: \mu(A) = 2) = \nu_2(A \times A)$ .

证明 由定理35知

$$\sum_{1 \leq j \leq h_n}^* P_{n_j} \xrightarrow{w} P$$

当且仅当

$$\sum_{1 \leq j \leq h_n} P_{n_j}((\cdot) \setminus \{0\}) \xrightarrow{t} P.$$

由引理20知, 这个条件又等价于对任意互不相交的  $A_1, \dots, A_m \in \mathcal{A}_{\lambda}$  有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\| \sum_{1 \leq j \leq h_n} (P_{n_j})_{A_1, \dots, A_m}((\cdot) \setminus \{0, \dots, 0\}) \right. \\ \left. - P_{A_1, \dots, A_m}((\cdot) \setminus \{0, \dots, 0\}) \right\| = 0.$$

命

$$c_1 = (1, 0, \dots, 0), c_2 = (0, 1, 0, \dots, 0)$$

$$c_m = (0, \dots, 0, 1)$$

是  $Z_+^m$  中的  $m$  个点, 由 Gauss-Poisson 过程的定义可知



$$\begin{aligned} P_{A_1, \dots, A_m}(e_i) &= \gamma_1 g_1^{-1}(\mu: \mu(A_i) = 1, \mu(A_j) = 0, j \neq i) \\ &\quad + \gamma_2 g_2^{-1}(\mu: \mu(A_i) = 1, \mu(A_j) = 0, j \neq i) \end{aligned}$$

其中  $g_1, g_2$  是在第 III 章 § 7 中定义的映象。

于是

$$\begin{aligned} P_{A_1, \dots, A_m}(e_i) &= \gamma_1(A_i) + 2\gamma_2(A_i \times (A_1 \cup \dots \cup A_m)^c), \\ P_{A_1, \dots, A_m}(e_i + e_j) &= 2\gamma_2(A_i \times A_j), \quad i \neq j, \\ P_{A_1, \dots, A_m}(2e_i) &= \gamma_2(A_i \times A_i). \end{aligned}$$

从而得到

$$\begin{aligned} &P_{A_1, \dots, A_m}((\cdot) \setminus \{0\}) \\ &= \sum_{1 \leq i \leq m} \gamma_1(A_i) \delta_{e_i} + 2 \sum_{1 \leq i, j \leq m} \gamma_2(A_i \times (A_1 \cup \dots \cup A_m)^c) \delta_{e_i} \\ &= \sum_{1 \leq i, j \leq m} \gamma_2(A_i \times A_j) \delta_{e_i + e_j}. \end{aligned}$$

因此  $\sum_{1 \leq j \leq h_n} P_{n,j}((\cdot) \setminus \{0\}) \xrightarrow{t} P$  等价于对任意互不相交的  $A_1, \dots, A_m \in \mathcal{A}_c P$  有

$$\begin{aligned} &\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \sum_{1 \leq j \leq h_n} (P_{n,j})_{A_1, \dots, A_m}((\cdot) \setminus \{0\}) \right. \\ &\quad - \sum_{1 \leq i \leq m} \gamma_1(A_i) \delta_{e_i} - 2 \sum_{1 \leq i, j \leq m} \gamma_2(A_i \times (A_1 \cup \dots \cup A_m)^c) \delta_{e_i} \\ &\quad \left. - \sum_{1 \leq i, j \leq m} \gamma_2(A_i \times A_j) \delta_{e_i + e_j} \right| = 0, \end{aligned}$$

由定理 7, 上式又等价于下国的条件:

- (1)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{1 \leq j \leq h_n} (P_{n,j})_{A_1, \dots, A_m}((\cdot) \setminus \{e_1, \dots, e_m, 2e_1, \dots, 2e_m\}) = 0,$
- (2)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{1 \leq j \leq h_n} (P_{n,j})_{A_1, \dots, A_m}(e_i) = \gamma_1(A_i) +$   
 $+ 2\gamma_2(A_i \times (A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_m)), \quad 1 \leq i \leq m,$
- (3)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{1 \leq j \leq h_n} (P_{n,j})_{A_1, \dots, A_m}(e_i + e_j) = 2\gamma_2(A_i \times A_j), \quad i \neq j,$
- (4)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{1 \leq j \leq h_n} (P_{n,j})_{A_1, \dots, A_m}(2e_i) = \gamma_2(A_i \times A_i), \quad 1 \leq i \leq m,$

由于  $\mathcal{A}_c P$  是环, 所以上面的条件 (1)~(4) 等价于: 对  $\mathcal{A}_c P$  中任意两个不相交的  $A, B$  有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{1 \leq j \leq h_n} P_{n,j}(\mu: \mu(A) > 2) = 0;$$

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{1 \leq j \leq k_n} P_{n,j}(\mu: \mu(A) = 1, \mu(B) = 0) &= \gamma_1(A) + 2\gamma_2(A \times (A \cup B)^c); \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{1 \leq j \leq k_n} P_{n,j}(\mu: \mu(A) = 1, \mu(B) = 1) &= 2\gamma_2(A \times B); \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{1 \leq j \leq k_n} P_{n,j}(\mu: \mu(A) = 2) &= \gamma_2(A \times A).\end{aligned}$$

最后, 为了完成定理的证明, 我们还得证明  $\mathcal{D}_{c,p} = \mathcal{D}_\lambda$ . 设  $A \in \mathcal{D}_{c,p}$ , 则按定义有

$$P(\mu: \mu(\partial A) > 0) = 0,$$

这显然等价于  $\gamma_1(\partial A) = 0$  及  $\gamma_2(\partial A \times X) = 0$ , 即等价于  $\lambda(\partial A) = 0$ .

由定理 1.52, 上述定理可以改为如下等价形式.

**41. 定理** 设  $P \in \mathcal{D}_{c,p}$  是 Gauss-Poisson 分布. 并且

$$\begin{aligned}-\log \Psi_P(f) &= \int (1 - e^{-f(a)}) \lambda(da) - \iint (1 - e^{-f(a)}) \\ &\quad \times (1 - e^{-f(b)}) H(da \times db), \quad f \in \mathcal{F}_{m+},\end{aligned}$$

其中  $\lambda \in M$ ,  $H$  是  $(X \times X, \mathcal{A} \times \mathcal{A})$  上的对称局部有限测度, 满足条件: 对任意的  $A, B \in \mathcal{A}$  有

$$H(A \times B) \leq \frac{1}{2} \min(\lambda(A), \lambda(B)).$$

现设  $\{P_{n,i}\}$  是无穷小三角序列, 则

$$\sum_{1 \leq j \leq k_n} P_{n,i} \xrightarrow{w} P$$

当且仅当对任意互不相交的  $A, B \in \mathcal{A}$ , 有

- 1)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{1 \leq j \leq k_n} P_{n,i}(\mu: \mu(A) > 2) = 0$ ;
- 2)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{1 \leq j \leq k_n} P_{n,i}(\mu: \mu(A) = 1, \mu(B) = 0) = \lambda(A) + 2H(A \times (A \cup B))$ ;
- 3)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{1 \leq j \leq k_n} P_{n,i}(\mu: \mu(A) = 1, \mu(B) = 1) = 2H(A \times B)$ ;
- 4)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{1 \leq j \leq k_n} P_{n,i}(\mu: \mu(A) = 2) = H(A \times A)$ .

**证明** 应用定理 1.52 的证明并注意

$$\lambda(A) = \gamma_1(A) + 2\gamma_2(A \times X),$$

$$H(A \times B) = \gamma_2(A \times B),$$

然后根据上面的定理 40 即得欲证.

## §9. 收敛于正则无穷可分分布

**42.** 本节假设  $P$  是正则无穷可分分布, 而且

$$-\log \Psi_P(f) = \sum_{h \in \mathbb{N}_+} \int \cdots \int (1 - \exp(-\sum_{i=1}^h f(a_i))) \gamma_h(da_1 \times \cdots \times da_h), f \in \mathcal{F}_{m+},$$

其中  $\gamma_k$  是  $(X^k, \mathscr{A}^k)$  上的完全对称测度, 满足条件: 对任意的  $A \in \mathscr{A}$ ,

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}_+} \gamma_k(X^k \setminus (A^c)^k) < \infty.$$

如果令  $\theta_k$  是在第 III 章 § 8 中定义的映象, 则

$$\tilde{P} = \sum_{k \in \mathbb{Z}_+} \gamma_k \theta_k^{-1},$$

因此对任意互不相交的  $A_1, \dots, A_m \in \mathscr{A}$ , 以及非负的  $h_1, \dots, h_m \in \mathbb{Z}_+$ , 容易算出

$$\begin{aligned} & \tilde{P}(\mu: \mu(A_1) = h_1, \dots, \mu(A_m) = h_m) \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}_+} \gamma_{h_1 + \dots + h_m + k} \theta_{h_1 + \dots + h_m + k}^{-1}(\mu: \mu(A_1) = h_1, \dots, \mu(A_m) = h_m) \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}_+} \frac{(h_1 + \dots + h_m + k)!}{h_1! \dots h_m! k!} \gamma_{h_1 + \dots + h_m + k}(A_1^{h_1} \times \dots \times A_m^{h_m} \times ((A_1 \cup \dots \cup A_m)^c)^k), \end{aligned}$$

应用这一结果, 我们就得到如下的收敛定理。

**48. 定理** 设  $P$  是正则无穷可分分布, 其 Laplace 变换如上所述。记

$$\lambda(\cdot) = \sum_{k \in \mathbb{Z}_+} \gamma_k(\cdot \times X^{k-1}).$$

现设  $\{P_n\}$  是无穷小三角序列, 则

$$\ast_{1 \leq j \leq n} P_n \xrightarrow{w} P$$

当且仅对任意的  $m \geq 1$  及任意互不相交的  $A_1, \dots, A_m \in \mathscr{A}$  以及任意的  $h_1 + \dots + h_m > 0$  有

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{1 \leq j \leq n} P_n(\mu: \mu(A_1) = h_1, \dots, \mu(A_m) = h_m) \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}_+} \frac{(h_1 + \dots + h_m + k)!}{h_1! \dots h_m! k!} \gamma_{h_1 + \dots + h_m + k}(A_1^{h_1} \times \dots \times A_m^{h_m} ((A_1 \cup \dots \cup A_m)^c)^k). \end{aligned}$$

**证明** 由定理 35 及定理 20 知

$$\sum_{1 \leq j \leq n} P_n((\cdot) \setminus \{0\}) \xrightarrow{I} \tilde{P}$$

是

$$\ast_{1 \leq j \leq n} P_n \xrightarrow{w} P$$

的充分必要条件, 而这又等价于: 对任意互不相交的  $A_1, \dots, A_m \in \mathscr{A}_{cP}$ , 有

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} \| \sum_{1 \leq j \leq n} (P_n)_{A_1, \dots, A_m}((\cdot) \setminus \{0, \dots, 0\}) \\ & \quad - \tilde{P}_{A_1, \dots, A_m}((\cdot) \setminus \{0, \dots, 0\}) \| = 0, \end{aligned}$$

由于对任意的  $h_1 + \dots + h_m > 0$  有

$$P_{A_1, \dots, A_m}(\mu: \mu(A_1) = h_1, \dots, \mu(A_m) = h_m) \\ = \sum_{h \in \mathbb{Z}_+} \frac{(h_1 + \dots + h_m + h)!}{h_1! \dots h_m! h!} \gamma_{h_1 + \dots + h_m + h} [A_1^{h_1} \times \dots \times A_m^{h_m} \times ((A_1 \cup \dots \cup A_m)^c)^h],$$

因此只须证明  $\mathscr{A}P = \mathscr{A}P$ , 而这与定理40中的证明完全一样。

在上面的定理中, 如果  $P$  是 Gauss-Poisson 过程, 则容易得到定理40中的条件1)~4)。

现设  $P \in \mathscr{P}_{LN}$  是  $m$ -正则的无穷可分分布 ( $m > 2$ ), 这时定理43中的  $\gamma_k$  当  $k > m$  时全为 0, 并且

$$\lambda(\cdot) = \sum_{k=1}^m \gamma_k(\cdot \times X^{k-1}).$$

这时

$$\bigwedge_{1 \leq j \leq m} P_{A_j} \xrightarrow{w} P$$

当且仅当对任意互不相交的  $A_1, \dots, A_m \in \mathscr{A}_\lambda$  以及任意  $h_1, \dots, h_m \in \mathbb{Z}_+$ ,  $0 < h_1 + \dots + h_m \leq m$  有

$$\begin{aligned} 1) \quad & \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{1 \leq j \leq h_n} P_n(\mu: \mu(A_1) > m) = 0; \\ 2) \quad & \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{1 \leq j \leq h_n} P_n(\mu: \mu(A_1) = h_1, \dots, \mu(A_m) = h_m) \\ & = \sum_{\substack{h \in \mathbb{Z}_+ \\ h_1 + \dots + h_m + h = m}} \frac{(h_1 + \dots + h_m + h)!}{h_1! \dots h_m! h!} \gamma_{h_1 + \dots + h_m + h} [A_1^{h_1} \times \dots \times A_m^{h_m} \\ & \quad \times ((A_1 \cup \dots \cup A_m)^c)^h]. \end{aligned}$$

## 第五章 混合型Poisson分布

### §1. 广义卷积

1. 定义 首先我们注意, 在定义 1.54 中虽然只对  $E_1, E_2 \in \mathcal{E}$  定义了卷积  $E_1 * E_2$ , 其实当  $E_1, E_2$  都是  $(N, N)$  上的  $\sigma$  有限测度时, 仍可用相同的方式定义  $E_1 * E_2$ . 这个注意我们今后将不再申明地用到.

现在考虑映象

$$\Psi: (a, \mu, \lambda) \mapsto (a, \mu + \lambda), \quad a \in X, \mu, \lambda \in N,$$

这是  $(X \times N \times N, \mathcal{A} \times N \times N)$  到  $(X \times N, \mathcal{A} \times N)$  的可测映象.

现设  $V$  是  $\mathcal{A} \times N$  上的  $\sigma$  有限测度,  $H$  是  $N$  上的  $\sigma$  有限测度. 在映象  $\Psi$  之下, 由  $V \times H$  所诱导的  $\mathcal{A} \times N$  上的测度称为  $V$  与  $H$  的广义卷积, 记为  $V \otimes H$ .

由定义, 对于  $A \in \mathcal{A}, Y \in N$ , 有

$$\begin{aligned} V \otimes H(A \times Y) &= (V \times H) \Psi^{-1}(A \times Y) \\ &= (V \times H) \{(a, \mu, \lambda): (a, \mu + \lambda) \in A \times Y\} \\ &= \iiint \mathbf{1}_{A \times Y}(a, \mu + \lambda) V \times H(da \times d\mu \times d\lambda) \\ &= \iint \mathbf{1}_Y(\mu + \lambda) V(A \times d\mu) H(d\lambda) \\ &= (V(A \times \cdot) * H)(Y), \end{aligned}$$

所以对于任意的  $A \in \mathcal{A}, Y \in N$  有

$$(V \otimes H)(A \times Y) = (V(A \times \cdot) * H)(Y).$$

2. 引理 设  $V$  是  $\mathcal{A} \times N$  上的  $\sigma$  有限测度,  $H$  是  $N$  上的  $\sigma$  有限测度,  $W$  是  $\mathcal{A} \times N$  上的测度,  $W = V \otimes H$  当且仅当对任意的  $A \in \mathcal{A}, Y \in N$ , 有

$$W(A \times Y) = (V(A \times \cdot) * H)(Y).$$

证明 必要性如前所述, 充分性利用通常的单调类定理.

3. 引理 设  $V$  是  $\mathcal{A} \times N$  上的  $\sigma$  有限测度,  $H_1, H_2$  是  $N$  上的  $\sigma$  有限测度. 如果  $H_1 * H_2$  及  $V \otimes H_1$  都是相应空间的  $\sigma$  有限测度, 则

$$(V \otimes H_1) \otimes H_2 = V \otimes (H_1 * H_2).$$

证明 设  $A \in \mathcal{A}$ , 由引理 2, 上式两边都是

$$V(A \times \cdot) * H_1 * H_2.$$

得证.

4. 定义 设  $(Q, \mathcal{T})$  是任意的可测空间,  $f_m$  是  $(Q, \mathcal{T})$  到  $(\mathcal{E}_+, \rho_{\mathcal{E}_+})$  的映象, 以  $\mathcal{M}(\mathcal{E}_+)$  记距离空间  $(\mathcal{E}_+, \rho_{\mathcal{E}_+})$  中的 Borel 集类. 则  $f_m$  是  $(Q, \mathcal{T})$  到  $(\mathcal{E}_+, \rho_{\mathcal{E}_+})$  的可测映象当且仅当对  $\mathcal{Q}$  中互不相交的  $A_1, \dots, A_m$ , 以及非负整数  $k_1, \dots, k_m$ , 实函数

$$\omega \mapsto f_\omega(\mu: \mu(A_1) = h_1, \dots, \mu(A_m) = h_m)$$

是可测的。这个结果可由单调类定理得到。

现设  $S$  是  $(\Omega, \mathcal{F})$  上的  $\sigma$  有限测度，则以下式

$$(\int f_\omega S(d\omega))(\cdot) \triangleq \int f_\omega(\cdot) S(d\omega)$$

定义测度  $\int f_\omega S(d\omega)$ 。

8. 引理 设  $(\Omega_1, \mathcal{F}_1)$ ,  $(\Omega_2, \mathcal{F}_2)$  是两个可测空间,  $f_{\omega_1}$ ,  $g_{\omega_2}$  分别是  $(\Omega_1, \mathcal{F}_1)$ ,  $(\Omega_2, \mathcal{F}_2)$  到  $(\mathcal{S}, \rho_{\mathcal{S}})$  的可测映射。则

$$(\omega_1, \omega_2) \mapsto f_{\omega_1} * g_{\omega_2}$$

是  $(\Omega_1 \times \Omega_2, \mathcal{F}_1 \times \mathcal{F}_2)$  到  $(\mathcal{S}, \rho_{\mathcal{S}})$  的可测映射。

又设  $S, T$  分别是  $(\Omega_1, \mathcal{F}_1)$ ,  $(\Omega_2, \mathcal{F}_2)$  上的  $\sigma$  有限测度, 则

$$\begin{aligned} & (\int f_{\omega_1} S(d\omega_1)) * (\int g_{\omega_2} T(d\omega_2))(\cdot) \\ &= \int (f_{\omega_1} * g_{\omega_2})(\cdot) (S \times T)(d\omega_1 \times d\omega_2). \end{aligned}$$

证明 首先假定  $S, T$  都是有限测度。又设  $A_1, \dots, A_m \in \mathcal{F}$  并且互不相交,  $k_1, \dots, k_m \in \mathbb{Z}_+$ , 则

$$\begin{aligned} & (f_{\omega_1} * g_{\omega_2})(\mu: \mu(A_i) = k_i, 1 \leq i \leq m) \\ &= \sum_{\substack{k_i * j_i = k_i \\ 1 \leq i \leq m}} f_{\omega_1}(\mu: \mu(A_i) = k_i, 1 \leq i \leq m) \\ & \quad \times g_{\omega_2}(\mu: \mu(A_i) = j_i, 1 \leq i \leq m), \end{aligned}$$

从而

$$(\omega_1, \omega_2) \mapsto f_{\omega_1} * g_{\omega_2}$$

是  $(\Omega_1 \times \Omega_2, \mathcal{F}_1 \times \mathcal{F}_2)$  到  $(\mathcal{S}, \rho_{\mathcal{S}})$  的可测映射。又由定义知

$$\begin{aligned} & ((\int f_{\omega_1} S(d\omega_1)) * (\int g_{\omega_2} T(d\omega_2)))(\mu: \mu(A_i) = k_i, 1 \leq i \leq m) \\ &= \sum_{\substack{k_i * j_i = k_i \\ 1 \leq i \leq m}} ((\int f_{\omega_1}(\mu: \mu(A_i) = k_i, 1 \leq i \leq m) S(d\omega_1)) \\ & \quad \times (\int g_{\omega_2}(\mu: \mu(A_i) = j_i, 1 \leq i \leq m) T(d\omega_2))) \\ &= \int (f_{\omega_1} * g_{\omega_2})(\mu: \mu(A_i) = k_i, 1 \leq i \leq m) S \times T(d\omega_1 \times d\omega_2), \end{aligned}$$

应用单调类定理, 我们得

$$(\int f_{\omega_1} S(d\omega_1)) * (\int g_{\omega_2} T(d\omega_2))(\cdot)$$

$$= (\int (i_{\omega_1} * g_{\omega_2})(S \times T)(d\omega_1 \times d\omega_2))(\cdot)_1$$

当  $S, T$  是  $\sigma$  有限测度时, 取  $\Omega_n^{(1)} \in \mathcal{F}_1, \Omega_n^{(2)} \in \mathcal{F}_2$  使  $\Omega_n^{(1)} \uparrow \Omega_1, \Omega_n^{(2)} \uparrow \Omega_2$ , 则  $\Omega_n^{(1)} \times \Omega_n^{(2)} \uparrow \Omega_1 \times \Omega_2$ . 在  $\Omega_n^{(1)} \times \Omega_n^{(2)}$  上应用上面所得的结果, 令  $n \rightarrow \infty$  则得引理的结论.

6. 定义 设  $(\Omega, \mathcal{F})$  是可测空间,  $\{S_\delta, \delta \in \Delta\}$  是  $(\Omega, \mathcal{F})$  上的一族测度, 称  $\{S_\delta, \delta \in \Delta\}$  是一致  $\sigma$  有限的, 如果存在  $\Omega_0 \in \mathcal{F}, \Omega_0 \uparrow \Omega$  使

$$S_\delta(\Omega_0) < \infty, \quad \delta \in \Delta, \quad n = 1, 2, \dots$$

7. 引理 设  $(\Omega_1, \mathcal{F}_1), (\Omega_2, \mathcal{F}_2)$  是两个可测空间. 如果对任意  $\omega_1 \in \Omega_1, V_{\omega_1}$  是  $\mathcal{A} \times \mathbb{N}$  上的测度, 而且  $\{V_{\omega_1}, \omega_1 \in \Omega_1\}$  是一致  $\sigma$  有限的; 又设对任意  $\omega_2 \in \Omega_2, H_{\omega_2} \in \mathcal{B}$ , 映像

$$\omega_1 \mapsto V_{\omega_1}, \quad \omega_2 \mapsto H_{\omega_2}$$

都是相应空间的可测映像. 则任对任意  $Z \in \mathcal{A} \times \mathbb{N}$ ,

$$(\omega_1, \omega_2) \mapsto (V_{\omega_1} \otimes H_{\omega_2})(Z)$$

是  $(\Omega_1 \times \Omega_2, \mathcal{F}_1 \times \mathcal{F}_2)$  上的可测函数.

又如果  $S, T$  分别是  $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2$  上的  $\sigma$  有限测度, 而且

$$V = \int V_{\omega_1} S(d\omega_1), \quad H = \int H_{\omega_2} T(d\omega_2)$$

都是  $\sigma$  有限测度, 则

$$V \otimes H = \int (V_{\omega_1} \otimes H_{\omega_2})(S \times T)(d\omega_1 \times d\omega_2).$$

证明 由于  $\{V_{\omega_1}, \omega_1 \in \Omega_1\}$  是一致  $\sigma$  有限的, 故可取  $L_n \in \mathcal{A} \times \mathbb{N}$  使  $L_n \uparrow \mathcal{A} \times \mathbb{N}$ , 并且

$$V_{\omega_1}(L_n) < \infty, \quad \omega_1 \in \Omega_1, \quad n = 1, 2, \dots$$

现设  $A \in \mathcal{A}, A_1, \dots, A_m \in \mathcal{A}$  且互不相交,  $h_1, \dots, h_m \in \mathbb{Z}_+$ , 则

$$\begin{aligned} & V_{\omega_1}((\cdot) \cap L_n) \otimes H_{\omega_2}(A \times (\mu: \mu(A_i) = h_i, 1 \leq i \leq m)) \\ &= \sum_{\substack{h_i \geq j_i \geq k_i \\ 1 \leq i \leq m}} V_{\omega_1}(A \times (\mu: \mu(A_i) = h_i, 1 \leq i \leq m)) \\ & \quad \times H_{\omega_2}(\mu: \mu(A_i) = j_i, 1 \leq i \leq m), \end{aligned}$$

于是映像

$$(\omega_1, \omega_2) \mapsto (V_{\omega_1}((\cdot) \cap L_n) \otimes H_{\omega_2})(\cdot)$$

是  $\Omega_1 \times \Omega_2$  到  $\mathcal{B}_+(X \times N)$  的可测映像. 然而

$$(V_{\omega_1} \otimes H_{\omega_2})(\cdot) = \sup (V_{\omega_1}((\cdot) \cap L_n) \otimes H_{\omega_2})(\cdot),$$

将前面的等式积分, 利用引理 2 及引理 5 得

$$\begin{aligned} & \int (V_{\omega_1}((\cdot) \cap L_n) \otimes H_{\omega_2})(A \times \cdot)(S \times T)(d\omega_1 \times d\omega_2) \\ &= \left( \int V_{\omega_1}((\cdot) \cap L_n) S(d\omega_1) \right) \otimes \left( \int H_{\omega_2} T(d\omega_2) \right) (A \times \cdot), \end{aligned}$$

再令  $n \rightarrow \infty$ , 得引理中所述的等式.

## §2. 无穷可分点过程的 Campbell 测度

8. 引理 设  $\Delta$  是指标集, 其元素至多可列,  $\{P_i, i \in \Delta\}$  是  $(N, \mathcal{N})$  上的分布族. 如果  $*P_i$  存在, 则

$$\mathcal{G} * P_i = \sum_{j \in \Delta} \mathcal{G} P_j \otimes (*P_j).$$

证明 如 1. §4, 以  $N_\Delta$  记满足条件  $\sum_{i \in \Delta} \mu_i \in N$  的所有  $\{\mu_i, i \in \Delta\}$ . 设  $\{\mu_i, i \in \Delta\} \in N_\Delta$ , 令  $\mu = \sum_{i \in \Delta} \mu_i$ , 则对任意的  $A \in \mathcal{A}$ , 有

$$\mu \times \delta_\mu(A \times \cdot) = \sum_{i \in \Delta} \mu_i \times \delta_\mu(A \times \cdot) = \sum_{i \in \Delta} \mu_i(A) \times (\delta_{\mu_i} * \delta_{\mu - \mu_i}),$$

从而由引理 2 得

$$\mu \times \delta_\mu = \sum_{i \in \Delta} (\mu_i \times \delta_{\mu_i}) \otimes \delta_{\mu - \mu_i} = \sum_{i \in \Delta} (\mathcal{G}_{\delta_{\mu_i}} \otimes \delta_{\sum_{j \neq i} \mu_j}).$$

由此得

$$\begin{aligned} \mathcal{G} * P_i &= \int \mu \times \delta_\mu(*P_i)(d\mu) = \sum_{j \in \Delta} \int_{N_\Delta} (\mathcal{G}_{\delta_{\mu_j}} \otimes \delta_{\sum_{k \neq j} \mu_k}) (\times_{j \in \Delta} P_j) (\times_{j \in \Delta} d\mu_j) \\ &= \sum_{j \in \Delta} (\mathcal{G}_{\delta_{\mu_j}} \otimes \delta_\lambda) [P_j * (*P_j)] (d\mu_j \times d\lambda), \end{aligned}$$

其中  $\lambda = \sum_{k \neq j} \mu_k$ . 注意到对于任意  $A \in \mathcal{A}$ , 有

$$\mathcal{G}_{\delta_\mu}(A \times N) = \int \nu(A) \delta_\mu(d\nu) = \mu(A) < \infty,$$

所以  $\{\mathcal{G}_{\delta_\mu}, \mu \in N\}$  是一致  $\sigma$  有限的. 应用引理 7, 可得

$$\begin{aligned} \mathcal{G} * P_i &= \sum_{j \in \Delta} \left( \int \mathcal{G}_{\delta_{\mu_j}} P_j(d\mu_j) \right) \otimes \left( \int \delta_\lambda(*P_j)(d\lambda) \right) \\ &= \sum_{j \in \Delta} \mathcal{G} P_j \otimes (*P_j). \end{aligned}$$

9. 定理 设  $P \in \mathcal{S}_{IN}$ , 则

$$\mathcal{G}_P = \mathcal{G} P \otimes P.$$

证明 记  $\tilde{P} = \sum_{i \in \Delta} E_i(E_i \in \mathcal{S}_+, E_i(0) = 0)$  是  $P$  的典测度. 由引理 8 知

$$\mathcal{G}_P = \mathcal{G} * P_i = \sum_{i \in \Delta} \mathcal{G} P_i \otimes (*P_i),$$

其中  $P_i = \mathcal{G}_{E_i}$ ,  $i \in \Delta$ .

如果  $E_i = 0$ , 则  $\mathcal{G}_{P_i} = 0 = \mathcal{G}_{E_i} \otimes P_i$ . 当  $E_i \neq 0$  时, 得



$$\mathcal{G}_{E_i} = e^{-E_i(N)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \mathcal{G}_{(E_i)^n},$$

但由引理 8 可知

$$\mathcal{G}_{(E_i)^n} = n \mathcal{G}_{E_i} \otimes E_i^{n-1},$$

所以

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_{E_i} &= e^{-E_i(N)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-1)!} \mathcal{G}_{E_i} \otimes E_i^{n-1} \\ &= \mathcal{G}_{E_i} \otimes \left( \sum_{n=0}^{\infty} e^{-E_i(N)} \frac{1}{n!} E_i^n \right) = \mathcal{G}_{E_i} \otimes P_i, \end{aligned}$$

从而由引理 7, 8 得

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_P &= \sum_{i \in S} (\mathcal{G}_{P_i} \otimes P_i) \otimes (*P_i) \\ &= \sum_{i \in S} \mathcal{G}_{P_i} \otimes (*P_i) = \left( \sum_{i \in S} \mathcal{G}_{P_i} \right) \otimes P = \mathcal{G}_P \otimes P. \end{aligned}$$

上述定理的逆定理仍然成立。

**10. 定理** 设  $P \in \mathcal{P}_{N^*}$ ,  $V$  是  $(X \times N, \mathcal{A}(X \times N))$  上的  $\sigma$  有限测度, 满足条件

$$V(A \times (\mu: \mu(A) = 0)) = 0, \quad A \in \mathcal{A},$$

并且

$$\mathcal{G}_P = V \otimes P,$$

则  $P \in \mathcal{P}_{N^*}$ , 而且  $V = \mathcal{G}_P$ .

**证明** 证明分为如下几步:

1) 设  $A_1, \dots, A_m \in \mathcal{A}$ ,  $A_1 \supset A_2 \supset \dots \supset A_m$ ,  $k_1, \dots, k_m \in \mathbb{Z}_+$ ,  $k_1 > 0$ . 由反演公式 (IV. 定理 3) 可知

$$P_{A_1, \dots, A_m}(h_1, \dots, h_m) = \frac{1}{h_1} \mathcal{G}_P(A_1 \times (\mu: \mu(A_i) = h_i, 1 \leq i \leq m)),$$

但由假定  $\mathcal{G}_P = V \otimes P$ , 故由引理 2 上式成为:

$$\begin{aligned} &h_1 P_{A_1, \dots, A_m}(h_1, \dots, h_m) = (V(A_1 \times *) * P)(\mu: \mu(A_i) = h_i, 1 \leq i \leq m) \\ &= \sum_{j_1=0}^{h_1} \dots \sum_{j_m=0}^{h_m} V(A_1 \times (\mu: \mu(A_i) = h_i - j_i, 1 \leq i \leq m)) P_{A_1, \dots, A_m}(j_1, \dots, j_m). \end{aligned}$$

如果上式右边出现  $\infty \cdot 0$  的形式, 令它为 0, 但在下面我们立即证明, 不会发生这种情况。

2) 设  $h_1, \dots, h_m > 0$ . 记

$$V_{A_1, \dots, A_m}(h_1, \dots, h_m) = V(A_1 \times (\mu: \mu(A_i) = h_i, 1 \leq i \leq m)),$$

由于  $V(A_1 \times (\mu: \mu(A_1) = 0)) = 0$ , 从而对一切  $h_2, \dots, h_m \geq 0$ , 有

$$\begin{aligned} & V_{A_1, \dots, A_m}(0, h_2, \dots, h_m) \\ &= V(A_1 \times (\mu: \mu(A_1) = 0, \mu(A_i) = h_i, 2 \leq i \leq m)) \\ &\leq V(A_1 \times (\mu: \mu(A_1) = 0)) = 0. \end{aligned}$$

3) 如果  $P_{A_1}(\{0\}) = 1$ , 则

$$\mathcal{E}_P(A_1 \times N) = \int \mu(A_1) P(d\mu) = 0,$$

又因为

$$\mathcal{E}_P(A_1 \times N) = (V(A_1 \times \cdot) * P)(N) = V(A_1 \times N) P(N) = V(A_1 \times N) = 0,$$

故对一切  $h_1, \dots, h_m \geq 0$ , 有

$$V_{A_1, \dots, A_m}(h_1, \dots, h_m) = 0.$$

4) 如果  $P_{A_1}(\{0\}) < 1$ , 则存在  $j_1 > 0$ ,  $P_{A_1}(j_1) > 0$ , 又因为

$$0 < P_{A_1}(j_1) = \sum_{j_2, \dots, j_m \in \mathbb{Z}_+} P_{A_1, \dots, A_m}(j_1, j_2, \dots, j_m),$$

故存在  $j_2, \dots, j_m \geq 0$  使  $P_{A_1, \dots, A_m}(j_1, \dots, j_m) > 0$ , 于是由1)得

$$\begin{aligned} & V_{A_1, \dots, A_m}(h_1, \dots, h_m) P_{A_1, \dots, A_m}(j_1, \dots, j_m) \\ &\leq (h_1 + j_1) P_{A_1, \dots, A_m}(h_1 + j_1, \dots, h_m + j_m) < \infty, \end{aligned}$$

从而对一切  $h_1, \dots, h_m \in \mathbb{Z}_+$ ,  $V_{A_1, \dots, A_m}(h_1, \dots, h_m)$  都是有限的; 又由上式知, 对一切  $h_1 > 0$ , 还有

$$V_{A_1, \dots, A_m}(h_1, \dots, h_m) \leq c h_1,$$

其中  $c > 0$  是常数. 上式对  $h_1 = 0$  也成立, 因为由2)有  $V_{A_1, \dots, A_m}(0, h_2, \dots, h_m) = 0$ .

5) 现设

$$\begin{aligned} P(\xi_1, \dots, \xi_m) &= \sum_{h_1, \dots, h_m \in \mathbb{Z}_+} P_{A_1, \dots, A_m}(h_1, \dots, h_m) \xi_1^{h_1} \dots \xi_m^{h_m}, \\ V(\xi_1, \dots, \xi_m) &= \sum_{h_1, \dots, h_m \in \mathbb{Z}_+} V_{A_1, \dots, A_m}(h_1, \dots, h_m) \xi_1^{h_1} \dots \xi_m^{h_m}, \end{aligned}$$

由4)得知上述二级数在  $|\xi_1| < 1, \dots, |\xi_m| < 1$  内收敛. 由1)得

$$\xi_1 \frac{\partial}{\partial \xi_1} P(\xi_1, \dots, \xi_m) = V(\xi_1, \dots, \xi_m) P(\xi_1, \dots, \xi_m),$$

由于  $V_{A_1, \dots, A_m}(0, h_2, \dots, h_m) = 0$ , 所以上式两边可用  $\xi_1 \neq 0$  除之而得

$$\frac{\partial}{\partial \xi_1} P(\xi_1, \dots, \xi_m) = \xi_1^{-1} V(\xi_1, \dots, \xi_m) P(\xi_1, \dots, \xi_m).$$

6) 在上面的微分方程中, 令  $m = 1$ , 注意到  $V_{A_1}(0) = 0$  得:

$$\frac{d}{d\xi_1} \left( \sum_{h \in \mathbb{Z}_+} P_{A_1}(h) \xi_1^h \right) = \left( \sum_{h \in \mathbb{Z}_+} V_{A_1}(h) \xi_1^{h-1} \right) \left( \sum_{h \in \mathbb{Z}_+} P_{A_1}(h) \xi_1^h \right),$$

如果  $P_{A_1}(0) = 0$ , 则比较两边系数得

$$P_{A_1}(1) = P_{A_1}(2) = \dots = 0,$$

这与  $\sum_{k \in \mathbb{Z}_+} P_{A_1}(k) = 1$  矛盾, 故总有  $P_{A_1}(0) > 0$ .

又因为我们假定了  $A_1 \supset A_2 \cup \dots \cup A_m$ , 故

$$\langle \mu: \mu(A_1) = 0 \rangle \subset \langle \mu: \mu(A_1) = 0, \mu(A_2) = 0, \dots, \mu(A_m) = 0 \rangle,$$

从而总有  $P_{A_1, \dots, A_m}(0, \dots, 0) = P_{A_1}(0) > 0$ .

所以(5)中的微分方程可写为

$$\frac{1}{P(\xi_1, \dots, \xi_m)} \frac{\partial}{\partial \xi_1} P(\xi_1, \dots, \xi_m) = \xi_1^{-1} V(\xi_1, \dots, \xi_m);$$

因为  $A_1 \supset A_2 \cup \dots \cup A_m$ , 故当  $j_2 + \dots + j_m > 0$  时,

$$P_{A_1, \dots, A_m}(0, j_2, \dots, j_m) = 0,$$

因此得

$$P(0, \xi_2, \dots, \xi_m) = P(0, \dots, 0) > 0.$$

7) 现在解微分方程

$$\frac{1}{P(\xi_1, \dots, \xi_m)} \frac{\partial}{\partial \xi_1} P(\xi_1, \dots, \xi_m) = \xi_1^{-1} V(\xi_1, \dots, \xi_m),$$

$$P(0, \xi_2, \dots, \xi_m) = P(0, \dots, 0);$$

它的解只能是

$$\begin{aligned} & P(\xi_1, \dots, \xi_m) \\ &= P(0, \dots, 0) \exp \left( \sum_{\substack{h_1, \dots, h_m \in \mathbb{Z}_+ \\ h_1 > 0}} \frac{1}{h_1} V_{A_1, \dots, A_m}(h_1, \dots, h_m) \xi_1^{h_1} \dots \xi_m^{h_m} \right), \\ & |\xi_1| < 1, \dots, |\xi_m| < 1; \end{aligned}$$

令  $0 < \xi_1, \dots, \xi_m \uparrow 1$ , 就得

$$\begin{aligned} 1 &= P(1, \dots, 1) \\ &= P(0, \dots, 0) \exp \left( \sum_{\substack{h_1, \dots, h_m \in \mathbb{Z}_+ \\ h_1 > 0}} \frac{1}{h_1} V_{A_1, \dots, A_m}(h_1, \dots, h_m) \right), \end{aligned}$$

于是

$$\sum_{\substack{h_1, \dots, h_m \in \mathbb{Z}_+ \\ h_1 > 0}} \frac{1}{h_1} V_{A_1, \dots, A_m}(h_1, \dots, h_m) < +\infty.$$

令

$$Q(h_1, \dots, h_m) = \begin{cases} \frac{1}{h_1} V_{A_1, \dots, A_m}(h_1, \dots, h_m), & h_1 > 0, \\ 0, & h_1 = 0, \end{cases}$$

则  $Q$  是  $\mathbb{Z}_+^m$  上的测度, 而且

$$P_{A_1, \dots, A_m}(h_1, \dots, h_m) = (e^{-Q(z_+^m)}) \sum_{j \in \mathbb{Z}_+^m} \frac{1}{j!} Q^j(h_1, \dots, h_m),$$

从而  $P_{A_1, \dots, A_m}$  是无穷可分分布。因为

$$P_{A_2, \dots, A_m}(*, \dots, *) = \sum_{k \in \mathbb{Z}_+} P_{A_1, A_2, \dots, A_m}(h, *, \dots, *),$$

从而  $P_{A_2, \dots, A_m}$  也是无穷可分分布。由于  $A_2, \dots, A_m \in \mathcal{S}$  是任意的，故由引理 IV.6 知

$P \in \mathcal{S}_{IN}$ 。

8) 由 1) 可以见到

$$V(A_1 \times \{\mu: \mu(A_i) = h_i, 1 \leq i \leq m\})$$

由  $P_{A_1, \dots, A_m}$  唯一确定，从而  $V_{A_1, \dots, A_m}$  被  $P_{A_1, \dots, A_m}$  唯一确定。应用单调类定理知  $V$  被  $P$  唯一确定。由于  $P \in \mathcal{S}_{IN}$ ，由定理 9 知

$$V = \mathcal{S} \sim \mathcal{P}.$$

**11. 推论** 设  $V$  是  $(X \times N, \mathcal{A}(X \times N))$  上的测度，对于任意  $A \in \mathcal{S}$  有

$$V(A \times \{\mu: \mu(A) = 0\}) = 0,$$

则方程

$$\mathcal{S}^* P = V * P$$

至多有一个解属于  $\mathcal{S}_N$ 。如果  $P$  是这样的一个解，则  $P \in \mathcal{S}_N$ 。对于这个解，

1°  $P$  是正则无穷可分的，当且仅当

$$V(X \times \{\mu: \mu(X) = \infty\}) = 0;$$

2°  $P$  是奇异无穷可分的，当且仅当

$$V(X \times \{\mu: \mu(X) < \infty\}) = 0;$$

3°  $P$  是无后效的，当且仅当

$$V(X \times \{\mu: \mu \text{ 不是形式 } n\delta_a, a \in X\}) = 0;$$

4°  $P$  是 Poisson 分布，当且仅当

$$V(X \times \{\mu: \mu(X) \neq 1\}) = 0;$$

5°  $P$  是  $G-P$  分布，当且仅当

$$V(X \times \{\mu: \mu(X) > 2\}) = 0.$$

这个推论容易由定理 10 推出。至于 1°~5° 则可由 § 中相应定理推出。

**12. 关于 Poisson 过程**，定理 10 还可以有一个很简单的便于记忆的形式。

设  $X \times N$  到  $X \times N$  的映像如下：

$$T: (a, \mu) \mapsto (a, \mu - (\mu(a) \wedge 1)\delta_a),$$

这里  $\mu(a) \wedge 1 = \min(\mu(a), 1)$ 。显然  $T$  是  $(X \times N, \mathcal{A}(X \times N))$  到自身的可推映像。如果  $V$  是  $\mathcal{A}(X \times N)$  上的  $\sigma$  有限测度，这个测度在映像  $T$  之下所诱导的测度记为  $V^T$ 。

**13. 定理** 设  $\lambda \in M$ ，则  $N$  上的分布  $P$  是 Poisson 分布  $P_\lambda$ ，当且仅当

$$\mathcal{S}^* P = \lambda \times P.$$

**证明** 由定理10,  $P$  是 Poisson 分布  $P_\lambda$  当且仅当

$$\mathcal{G}_P = \mathcal{G}_{Q_\lambda} \otimes P,$$

但对于任意  $A \in \mathcal{A}, Y \in \mathbb{N}$  有

$$\mathcal{G}_{Q_\lambda}(A \times Y) = \int_Y \mu(A) Q_\lambda(d\mu) = \int \delta_{(a, \delta_a)}(A \times Y) \lambda(da),$$

于是由定理10及引理2知

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_P(A \times Y) &= \left( \int \delta_{(a, \delta_a)}(A \times \cdot) \lambda(da) * P \right)(Y) \\ &= \int \delta_a(A) (\delta_{\delta_a} * P)(Y) \lambda(da), \end{aligned}$$

然而

$$\begin{aligned} (\delta_{\delta_a} * P)(Y) &= \int 1_Y(\nu + \mu) (\delta_{\delta_a} \times P)(d\nu \times d\mu) \\ &= \int 1_Y(\delta_a + \mu) P(d\mu) = P(\mu: \mu + \delta_a \in Y), \end{aligned}$$

于是在变换  $T$  之下, 得

$$\mathcal{G}_P^T(A \times Y) = \int (\delta_a \times P)(A \times Y) \lambda(da) = \lambda(A) \times P(Y),$$

即  $\mathcal{G}_P^T = \lambda \times P$ .

### §3. $G_\lambda$ 型分布

**14. 定义** 设  $\lambda \in M, A \in \mathcal{A}, \lambda(A) > 0$ , 令

$$\lambda(\cdot | A) = (\lambda(A))^{-1} \lambda(\cdot \cap A).$$

现设  $E \in \mathcal{E}_+$ , 称  $E$  是  $G_\lambda$  型测度, 如果对任意的  $A \in \mathcal{A}$  有

$${}_A E = \begin{cases} \sum_{h \in \pi_A} E(\mu: \mu(A) = h) (Q_{\lambda(\cdot | A)})^h, & \text{当 } \lambda(A) > 0, \\ E(N) \delta_0, & \text{当 } \lambda(A) = 0, \end{cases}$$

如果  $P \in \mathcal{P}_N$ , 且  $P$  是  $G_\lambda$  型, 则称  $P$  为  $G_\lambda$  型分布. 因此, 如果  $\xi$  是点过程, 其分布  $P_\xi^{-1}$  是  $G_\lambda$  型分布, 则称  $\xi$  为  $G_\lambda$  型过程.

我们的主要目的在于弄清楚  $G_\lambda$  型过程的构造. 本节首先研究  $G_\lambda$  型测度的一些简单性质.

首先注意, 如果  $E$  是  $G_\lambda$  型测度, 则对任意  $A \in \mathcal{A}$ , 容易算出  ${}_A E$  的 Laplace 变换. 对任意  $f \in \mathcal{F}_m$  有

$$\begin{aligned} {}_A E(f) &= \int e^{-\mu f} ({}_A E)(\mu d) \\ &= \begin{cases} \sum_{h \in \pi_A} E_A(h) \left( \frac{1}{\lambda(A)} \right)^h \left( \int_A e^{-f(a)} \lambda(da) \right)^h, & \text{当 } \lambda(A) > 0, \\ E(N), & \text{当 } \lambda(A) = 0. \end{cases} \end{aligned}$$

**15. 引理** 设  $\lambda \in M$ , 则对任意  $B \in \mathcal{A}, \lambda(B) > 0$ , 以及  $h, n \in \mathbb{Z}_+$  有

$$\left( Q_{\lambda(\cdot | B)} \right)_B^n(h) = \begin{cases} 1, & \text{当 } h = n; \\ 0, & \text{当 } h \neq n. \end{cases}$$

**证明** 因为

$$\begin{aligned} (Q_{\lambda(\cdot|B)})_B^*(h) &= (Q_{\lambda(\cdot|B)})^n (\mu: \mu(B)=h) \\ &= \begin{cases} (\lambda(B|B))^n, & \text{当 } h=n, \\ 0, & \text{当 } h \neq n. \end{cases} \end{aligned}$$

**16. 引理** 设  $\lambda \in \mathcal{M}$ ,  $A \in \mathcal{A}$ ,  $\lambda(A) > 0$ . 如果  $E$  是  $G_A$  型测度, 则对任意  $B \in \mathcal{B}$ ,  $B \subset A$  有

$$E_B = \mathcal{G}_{\lambda(B|A)} E_A.$$

**证明** 记  $c = \lambda(B|A)$ . 当  $c > 0$  时, 由定义得

$$\begin{aligned} {}_B E = {}_B ({}_A E) &= \sum_{h \in \mathbb{N}_+} E_A(h) \left( \frac{1}{\lambda(A)} Q_{(\cdot|A)} \right)^h \\ &= \sum_{h \in \mathbb{N}_+} E_A(h) \left( \frac{1}{\lambda(A)} \right)^h ({}_A Q_{(\cdot|A)})^h \\ &= \sum_{h \in \mathbb{N}_+} E_A(h) \left( \frac{1}{\lambda(A)} \right)^h (\lambda(A \setminus B) \delta_0 + Q_{(\cdot|B)})^h \\ &= \sum_{h \in \mathbb{N}_+} E_A(h) ((1-c) \delta_0 + c Q_{(\cdot|B)})^h \\ &= \sum_{n \in \mathbb{N}_+} (\mathcal{G}_c E_A)(n) (Q_{\lambda(\cdot|B)})^n, \end{aligned}$$

由引理15得

$$\begin{aligned} E_B(h) &= ({}_B E)_B(h) = \sum_{n \in \mathbb{N}_+} (\mathcal{G}_c E_A)(n) (Q_{\lambda(\cdot|B)})_B^n(h) \\ &= (\mathcal{G}_c E_A)(h), \end{aligned}$$

所以  $E_B = \mathcal{G}_c E_A$ . 当  $\lambda(B) = 0$  时, 显然

$$E_B = ({}_B E)_B = (E(N) \delta_0)_B = \mathcal{G}_c E_A.$$

**17. 引理** 设  $\lambda \in \mathcal{M}$ ,  $E_1, E_2$  是  $G_A$  型测度. 如果对任意的  $A \in \mathcal{A}$  都有  $(E_1)_A = (E_2)_A$ , 则

$$E_1 = E_2.$$

**证明** 当  $\lambda(A) > 0$  时, 有

$$\begin{aligned} {}_A (E_1) &= \sum_{h \in \mathbb{N}_+} (E_1)_A(h) (Q_{\lambda(\cdot|A)})^h \\ &= \sum_{h \in \mathbb{N}_+} (E_2)_A(h) (Q_{\lambda(\cdot|A)})^h = {}_A (E_2), \end{aligned}$$

而当  $\lambda(A) = 0$  时有

$$\begin{aligned} {}_A (E_1) &= E_1(N) \delta_0 = \sum_{h \in \mathbb{N}_+} (E_1)_A(h) \delta_0 \\ &= \sum_{h \in \mathbb{N}_+} (E_2)_A(h) \delta_0 = E_2(N) \delta_0 = {}_A (E_2), \end{aligned}$$

所以

$${}_A (E_1) = {}_A (E_2), \quad \forall A \in \mathcal{A},$$

从而  $E_1 = E_2$ .

18. 引理 如果  $E_1, E_2$  是  $G_A$  型测度, 则  $E_1 * E_2$  也是  $G_A$  型测度, 并且对于任意的  $A \in \mathcal{A}$  有

$$\begin{aligned} {}_A(E_1 * E_2) &= \\ &= \begin{cases} \sum_{h \in X_+} ((E_1)_A * (E_2)_A)(h) (Q_{\lambda(\cdot|A)})^h, & \text{当 } \lambda(A) > 0, \\ (E_1 * E_2)(N) \delta_0, & \text{当 } \lambda(A) = 0. \end{cases} \end{aligned}$$

证明 当  $\lambda(A) > 0$  时有

$$\begin{aligned} {}_A(E_1 * E_2) &= {}_A(E_1) * {}_A(E_2) \\ &= \left( \sum_{n \in \mathbb{Z}_+} (E_1)_A(n) Q_{\lambda(\cdot|A)}^n \right) * \left( \sum_{m \in \mathbb{Z}_+} (E_2)_A(m) Q_{\lambda(\cdot|A)}^m \right) \\ &= \sum_{h \in X_+} ((E_1)_A * (E_2)_A)(h) (Q_{\lambda(\cdot|A)})^h \\ &= \sum_{h \in X_+} (E_1 * E_2)_A(h) (Q_{\lambda(\cdot|A)})^h, \end{aligned}$$

而当  $\lambda(A) = 0$  时有

$$\begin{aligned} {}_A(E_1 * E_2) &= ({}_A E_1) * ({}_A E_2) \\ &= E_1(N) \delta_0 * E_2(N) \delta_0 = E_1(N) E_2(N) \delta_0 \\ &= (E_1 * E_2)(N) \delta_0. \end{aligned}$$

19. 引理 设  $(E_n)$  都是  $G_A$  型测度, 而且

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|E_n - E\| = 0,$$

则  $E$  是  $G_A$  型测度.

证明 当  $\lambda(A) > 0, A \in \mathcal{A}$  时有

$$\begin{aligned} \limsup_{n \rightarrow \infty} \left\| \sum_{h \in X_+} (E_n)_A(h) (Q_{\lambda(\cdot|A)})^h - \sum_{h \in X_+} E_A(h) (Q_{\lambda(\cdot|A)})^h \right\| \\ \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \sum_{h \in X_+} |(E_n)_A(h) - E_A(h)| \\ = \limsup_{n \rightarrow \infty} \| (E_n)_A - E_A \| = 0, \end{aligned}$$

另一方面, 又有

$$\begin{aligned} \limsup_{n \rightarrow \infty} \left\| \sum_{h \in X_+} (E_n)_A(h) (Q_{\lambda(\cdot|A)})^h - {}_A E \right\| \\ = \limsup_{n \rightarrow \infty} \| {}_A(E_n - E) \| = 0, \end{aligned}$$

故得

$${}_A E = \sum_{h \in X_+} E_A(h) (Q_{\lambda(\cdot|A)})^h,$$

当  $\lambda(A) = 0$  时, 我们有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \| {}_A E_n - {}_A E \| = 0,$$

以及

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E_n(N) = E(N),$$

从而

$$\begin{aligned} \|_A E - E(N)\delta_0\| &= \lim_{n \rightarrow \infty} \|_A E_n - E(N)\delta_0\| \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \|E_n(N)\delta_0 - E(N)\delta_0\| = 0. \quad \text{证毕.} \end{aligned}$$

## §4. 混合型 Poisson 过程

**20. 定义** 由 I.42 知道, 在距离空间  $(\mathcal{E}_+, \rho_{\mathcal{E}_+})$  中,  $\mathcal{P}_N$  是闭集. 作为  $(\mathcal{E}_+, \rho_{\mathcal{E}_+})$

的子空间,  $\mathcal{P}_N$  中的 Borel 集类记为  $\mathcal{A}(\mathcal{P}_N)$ .

现设  $\sigma$  是  $(\mathbb{C}(0, \infty), \mathcal{A}(\mathbb{C}(0, \infty)))$  上的一个分布, 称  $\sigma$  是一个非负随机数分布.

又设  $\lambda \in M$ , 若映象

$$1 \sim P_{1\lambda}$$

是  $(\mathbb{C}(0, \infty), \mathcal{A}(\mathbb{C}(0, \infty)))$  到  $(\mathcal{P}_N, \mathcal{A}(\mathcal{P}_N))$  的可测映象, 其中  $P_{1\lambda}$  是强度测度为  $1\lambda$  的 Poisson 分布, 则称

$$P(\cdot) = \int P_{1\lambda}(\cdot) \sigma(d\lambda)$$

为混合型 Poisson 分布.

点过程  $\xi$  的分布  $P\xi^{-1}$  如果是混合型 Poisson 分布, 则称  $\xi$  是混合型 Poisson 过程.

如果  $\sigma_1, \sigma_2$  是两个非负随机数分布, 则对任意的  $\lambda \in M$ , 由引理 5 得

$$\begin{aligned} \left( \int P_{1\lambda}(\cdot) \sigma_1(d\lambda) \right) * \left( \int P_{1\lambda}(\cdot) \sigma_2(d\lambda) \right) &= \int (P_{1\lambda} * P_{2\lambda})(\cdot) (\sigma_1 \times \sigma_2)(d\lambda \times d\lambda) \\ &= \int P_{(\lambda_1 + \lambda_2)}(\cdot) (\sigma_1 \times \sigma_2)(d\lambda \times d\lambda) = \int P_{1\lambda}(\cdot) (\sigma_1 * \sigma_2)(d\lambda). \end{aligned}$$

**21. 引理** 设  $\lambda \in M$ ,  $\sigma$  是非负随机数分布, 则

$$P(\cdot) = \int P_{1\lambda}(\cdot) \sigma(d\lambda)$$

是  $G_\lambda$  型分布.

**证明** 如果  $\lambda \in \mathcal{B}$ ,  $\lambda(A) = 0$ , 则

$$({}_A P)(\cdot) = \int ({}_A P_{1\lambda})(\cdot) \sigma(d\lambda) = \delta_0 = P(N)\delta_0$$

如果  $\lambda(A) > 0$ , 则

$$\begin{aligned} {}_A \left( \int P_{1\lambda}(\cdot) \sigma(d\lambda) \right) &= \int \sum_{h \in \mathbb{Z}_+} \frac{1}{h!} e^{-1\lambda(A)} Q_{1(A)}^h(\cdot) \sigma(d\lambda) \\ &= \sum_{h \in \mathbb{Z}_+} \left( \int P_{1\lambda}(\cdot) \sigma(d\lambda) \right) {}_A(h) (Q_{1(A)}^h(\cdot)). \end{aligned}$$

由此引理立刻知道, 强度测度为  $\lambda$  的 Poisson 分布  $P_\lambda$  是  $G_\lambda$  型分布.

下面举一个例子, 说明简单分布不一定是有序的.



22. 例 设  $L$  是数直线  $R$  上的勒贝格测度, 令

$$P(\cdot) = \int_1^\infty P_{tL}(\cdot) c t^{-(c+1)} L(d t), \quad 0 < c < 1,$$

因为

$$\int_1^\infty c t^{-(c+1)} L(d t) = 1,$$

所以  $P$  是混合型 Poisson 分布. 设  $A$  是  $[0, 1]$  中的 Borel 集,  $L(A) > 0$ , 则

$$\begin{aligned} P(\mu: \mu(A) > 1) &= \int_1^\infty \frac{1 - e^{-tL(A)} (1 + tL(A))}{t^{(c+1)}} c L(d t) \\ &= (L(A))^c \int_{L(A)}^\infty \frac{1 - e^{-y} (1 + y)}{y^{(c+1)}} c L(dy) \\ &\geq (L(A)) \int_{L(A)}^\infty \frac{1 - e^{-y} (1 + y)}{y^{(c+1)}} c L(dy), \end{aligned}$$

因此对于  $[0, 1]$  的任意分割  $(\mathcal{Q})$  总有

$$\begin{aligned} &\sum_{A \in \mathcal{Q}} P(\mu: \mu(A) > 1) \\ &\geq \left( \sum_{A \in \mathcal{Q}} L(A) \right) \int_1^\infty \frac{1 - e^{-y} (1 + y)}{y^{(c+1)}} c L(dy) \\ &= \int_1^\infty \frac{1 - e^{-y} (1 + y)}{y^{(c+1)}} c L(dy) > 0, \end{aligned}$$

由有序性的定义, 知道  $P$  不是有序的, 但因为  $L$  是扩散的, 故由定理 1.40 知  $P$  是简单的.

## §5. $G_\lambda$ 型分布的刻划

23. 在 §2 中我们定义了  $G_\lambda$  型过程, 在 §3 中又定义了混合型 Poisson 过程, 这两类过程有着本质的联系. 在这一节中我们就要研究这个问题.

首先证明几个引理.

24. 引理 对任意的  $0 < c < 1$ , 以  $\Pi_c$  记  $Z_+$  上的 Poisson 分布, 即

$$\begin{aligned} \Pi_c(Z_+) &= 1, \\ \Pi_c(h) &= \frac{1}{h!} e^{-c} c^h, \quad h \in Z_+, \end{aligned}$$

则有

$$\left\| \mathcal{D}_c \delta_n - \Pi_{nc} \right\| \leq 2nc^2.$$

证明 因为

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_c \delta_n &= ((1-c)\delta_0 + c\delta_1)^n, \\ \Pi_{nc} &= (\tilde{H}c)^n = (e^{-c}c\delta_1)^n, \end{aligned}$$

又因为

$$\mathcal{D}_{(1-c)\delta_0} = \delta_0,$$

所以

$$\Pi_{nc} = (\mathcal{W}_{(1-c)\delta_0 + c\delta_1})^n,$$

应用引理 I.15 及推论 I.17, 得

$$\begin{aligned} \left| \mathcal{D}_c \delta_n - \Pi_{nc} \right| &= \left| ((1-c)\delta_0 + c\delta_1)^n - (\mathcal{W}_{c\delta_1})^n \right| \\ &= \left| ((1-c)\delta_0 + c\delta_1)^n - (\mathcal{W}_{(1-c)\delta_0 + c\delta_1})^n \right| \\ &\leq n \left| (1-c)\delta_0 + c\delta_1 - \mathcal{W}_{(1-c)\delta_0 + c\delta_1} \right| \\ &\leq 2n(1 - (1-c))^2 = 2nc^2. \end{aligned}$$

25. 引理 设  $0 \leq c \leq 1$ ,  $n, k \in \mathbb{Z}_+$ , 则

$$\mathcal{D}_c \delta_{n+1}(k+1, k+2, \dots) \geq \mathcal{D}_c \delta_n(k+1, k+2, \dots).$$

证明 当  $n=0$  时, 有

$$\mathcal{D}_c \delta_1(k+1, k+2, \dots) \geq \mathcal{D}_c \delta_0(k+1, k+2, \dots) = 0;$$

当  $n>0$  时, 有

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_c \delta_{n+1}(k+1, k+2, \dots) &= [(1-c)\mathcal{D}_c \delta_n + c\delta_1 * \mathcal{D}_c \delta_n](k+1, k+2, \dots) \\ &\geq (1-c)\mathcal{D}_c \delta_n(k+1, k+2, \dots) + c\mathcal{D}_c \delta_n(k+1, k+2, \dots) \\ &= \mathcal{D}_c \delta_n(k+1, k+2, \dots). \end{aligned}$$

下面的定理是本节的主要结果之一, 它回答了本节开头所提出的问题。

26. 定理 设  $\lambda \in M$ ,  $\lambda(X) = \infty$ , 则  $(N, \mathbb{N})$  上的分布  $P$  是  $G_\lambda$  型分布的充分必要条件为: 存在非负随机数分布  $\sigma$  使

$$P(\cdot) = \int P_{\lambda l}(\cdot) \sigma(dl),$$

换言之,  $P$  是混合型 Poisson 分布。

证明 充分性已于引理 21 证明。现假设  $P$  是  $G_\lambda$  型分布,  $\lambda(X) = \infty$ , 欲证  $P$  是混合型 Poisson 分布。证明分为如下几步:

1° 设  $A_n \in \mathcal{B}$ ,  $\lambda(A_n) > 0$ ,  $A_n \uparrow X$ , 令

$$\sigma_n = \sum_{h \in \mathbb{Z}_+} P_{A_n}(h) \delta_{\lambda(A_n)^{-1}},$$

我们断言: 对任给的  $\varepsilon > 0$ , 必存在  $c > 0$  使对  $n$  一致地成立,

$$\sigma_n([c, \infty)) < \varepsilon.$$

若不然, 则因有

$$\sigma_n([c, \infty)) = \sum_{h \in \mathbb{Z}_+ \lambda(A_n)} P_{A_n}(h) = P(\mu: \mu(A_n) \geq c\lambda(A_n)),$$

故存在  $\varepsilon_0 > 0$  以及序列  $\{n_s\}$  使

$$P(\mu: \mu(A_{n_s}) \geq s\lambda(A_{n_s})) \geq \varepsilon_0$$

对一切  $s \in \mathbb{Z}_+$  成立, 由于  $\lambda(X) = \infty$ , 我们还可取得  $\lambda(A_{n_s}) \geq n_s^2$ , 从而有  $\lambda(A_{n_s}) \geq (n_s)^2 \geq s^2$ .

现设任意  $A \in \mathcal{B}$ ,  $\lambda(A) > 0$ , 则当  $s, h \in \mathbb{Z}_+$  时有

$$P(\mu: \mu(A) > h)$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{h \in \mathbb{Z}_+} P_{A_{n_s}}(h) (Q_{\lambda(\cdot | A_{n_s})})^h (\mu: \mu(A) > h) \\
&\geq \sum_{h \geq b_s} P_{A_{n_s}}(h) (Q_{\lambda(\cdot | A_{n_s})})^{b_s} (\mu: \mu(A) > h),
\end{aligned}$$

其中  $b_s = \lfloor s\lambda(A_{n_s}) \rfloor$  是  $s\lambda(A_{n_s})$  的整数部分。于是

$$P(\mu: \mu(A) > h) \geq P(\mu: \mu(A_{n_s}) \geq s\lambda(A_{n_s})) \mathcal{D}_c \delta_{b_s}(h+1, h+2, \dots),$$

其中  $c = \frac{\lambda(A)}{\lambda(A_{n_s})}$ 。上面用到了

$$(Q_{\lambda(\cdot | A_{n_s})})^{b_s} (\mu: \mu(A) > h) = \mathcal{D}_c \delta_{b_s}(h+1, h+2, \dots).$$

应用引理24, 上面的不等式变为:

$$P(\mu: \mu(A) > h) \geq e_0 (\prod_{b_s c} (h+1, h+2, \dots) - 2b_s c^2),$$

因为

$$b_s c^2 = \left( \frac{\lambda(A)}{\lambda(A_{n_s})} \right)^2 b_s \leq \frac{1}{s} (\lambda(A))^2,$$

故当  $s \rightarrow \infty$  时  $b_s c^2 \rightarrow 0$ ; 又因为当  $s \rightarrow \infty$  时,  $b_s c \rightarrow \infty$ , 所以

$$\begin{aligned}
P(\mu: \mu(A) > h) &\geq e_0 \lim_{s \rightarrow \infty} (\prod_{b_s c} (h+1, h+2, \dots) - 2b_s c^2) \\
&= e_0 \lim_{s \rightarrow \infty} \sum_{k \geq h} e^{-b_s c} \frac{(b_s c)^k}{k!} \\
&= e_0 \lim_{s \rightarrow \infty} (1 - e^{-b_s c} \sum_{k \neq h} \frac{(b_s c)^k}{k!}) = e_0,
\end{aligned}$$

从而得到

$$P(\mu: \mu(A) = \infty) \geq e_0,$$

这与  $A \in \mathcal{A}$  矛盾。

上面我们证明了  $\{\sigma_n\}$  满足条件。任给  $\varepsilon > 0$ , 必存在  $c > 0$  使  $\sigma_n([c, \infty)) < \varepsilon$  对一切  $n$  成立。这说明  $(0, \infty)$  上的分布族  $\{\sigma_n\}$  是弱相对紧的。

2° 由1°知, 存在  $\{\sigma_n\}$  的子序列  $\{\sigma_{n_k}\}$  弱收敛于  $(0, \infty)$  上的某个分布  $\sigma$ 。固定  $A \in \mathcal{A}$ ,

$h \in \mathbb{Z}_+$ , 则  $l \mapsto \prod_{l \in A} (h) \sigma_{n_k}(dl)$  是  $(0, \infty)$  上的有界连续函数, 故由  $\sigma_{n_k} \xrightarrow{w} \sigma$  可得,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int \prod_{l \in A} (h) \sigma_{n_k}(dl) = \int \prod_{l \in A} (h) \sigma(dl).$$

由定理 IV.7 我们得:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left\| \int \prod_{l \in A} (\cdot) \sigma_{n_k}(dl) - \int \prod_{l \in A} (\cdot) \sigma(dl) \right\| = 0.$$

3° 现在再次应用引理24, 对任意  $n, s > 0$ , 令  $c = \frac{\lambda(A)}{\lambda(A_n)}$ , 则

$$\left| P_A - \int \prod_{l \in A} (\cdot) \sigma_n(dl) \right| = \left| P_A - \sum_{h \in \mathbb{Z}_+} P_{A_n}(h) \prod_{l \in c} \right|$$

$$\begin{aligned}
&= \left| \sum_{k \in \mathbb{Z}} P(\mu: \mu(A_n) = k) ((\mathcal{D}_c \delta_1)^k - \Pi_{hc}) \right| \\
&\leq \sum_{0 \leq k \leq \lambda(A_n)} P_{A_n}(k) 2 \cdot hc^2 + 2P(\mu: \mu(A_n) \geq s\lambda(A_n)) \\
&\leq 2s\lambda(A_n)c^2 + 2P(\mu: \mu(A_n) \geq s\lambda(A_n)) \\
&= 2s(\lambda(A_n))^{-1}(\lambda(A))^2 + 2P(\mu: \mu(A_n) \geq s\lambda(A_n)),
\end{aligned}$$

固定  $s$ , 令  $n \rightarrow \infty$  得:

$$\begin{aligned}
&\limsup_{n \rightarrow \infty} \left\| P_A - \int \Pi_{I\lambda(A)}(\cdot) \sigma_n(dI) \right\| \\
&\leq \limsup_{n \rightarrow \infty} 2P(\mu: \mu(A_n) \geq s\lambda(A_n)),
\end{aligned}$$

再令  $s \rightarrow \infty$ , 根据 1° 的证明得

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} 2P(\mu: \mu(A_n) \geq s\lambda(A_n)) = 0,$$

从而得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\| P_A - \int \Pi_{I\lambda(A)}(\cdot) \sigma_n(dI) \right\| = 0,$$

再根据 2° 得

$$P_A = \int \Pi_{I\lambda(A)}(\cdot) \sigma(dI) = \left( \int P_{I\lambda}(\cdot) \sigma(dI) \right)_A,$$

所以由引理 17 及引理 21 得

$$P = \int P_{I\lambda}(\cdot) \sigma(dI).$$

定理 28 指出, 当  $\lambda \in M$ ,  $\lambda(X) = \infty$  时,  $G_\lambda$  型分布与如下形式的混合型 Poisson 分布重合:

$$P(\cdot) = \int P_{I\lambda}(\cdot) \sigma(dI).$$

自然会产生这样的问题: 当  $\lambda(X) < \infty$  时会是怎样的情形? 由于  $\lambda(X) < \infty$  表明  $\lambda$  是  $(X, \mathcal{A})$  上的有限测度, 这时我们考虑  $\lambda$  为  $(X, \mathcal{A})$  上的分布即已足够。

下述引理指出, 当  $\lambda$  是  $(X, \mathcal{A})$  上的分布时, 如果  $P$  是  $G_\lambda$  型分布, 则  $P$  是有限点过程。

**27. 引理** 设  $\lambda$  是  $(X, \mathcal{A})$  上的分布, 如果  $P$  是  $G_\lambda$  型分布, 则

$$P(\mu: \mu(X) < \infty) = 1.$$

**证明** 取  $A_1 \in \mathcal{A}$ , 使

$$\lambda(A_1) > 0, \quad \frac{\lambda(X \setminus A_1)}{\lambda(A_1)} \leq 1,$$

因为  $\lambda$  是  $\mathcal{A}$  上的分布, 这样的  $A_1$  是可以取到的。又取  $A_1 \subset A_2 \subset \cdots \subset A_n \uparrow X$ ,  $A_n \in \mathcal{A}$ , 应用引理 16, 当  $n > m$  时有

$$\begin{aligned}
P_{A_n \setminus A_m} &= \mathcal{D}_{(\lambda(A_n))^{-1}\lambda(A_n \setminus A_m)} P_{A_n} \\
&= \mathcal{D}_{(\lambda(A_n))^{-1}\lambda(A_n \setminus A_m)} (\mathcal{D}_{(\lambda(A_n))^{-1}\lambda(A_1)} )^{-1} P_{A_1}.
\end{aligned}$$

注意到  $\mathcal{D}_{c_1 c_2} = \mathcal{D}_{c_1} \mathcal{D}_{c_2}$ , 得

$$P_{A_n \setminus A_m} = \mathcal{D}_{(\lambda(A_1))^{-1} \lambda(A_n \setminus A_m)} P_{A_1},$$

又因为

$$\begin{aligned} P_{A_n \setminus A_m}(\{0\}) &= \mathcal{D}_{(\lambda(A_1))^{-1} \lambda(A_n \setminus A_m)} P_{A_1}(\{0\}) \\ &= \sum_{h \in \mathbb{Z}_+} P_{A_1}(h) (1 - (\lambda(A_1))^{-1} \lambda(A_n \setminus A_m))^h \\ &\geq \sum_{h \in \mathbb{Z}_+} P_{A_1}(h) (1 - (\lambda(A_1))^{-1} \lambda(X \setminus A_m))^h, \end{aligned}$$

从而

$$P_{X \setminus A_m}(\{0\}) \geq \sum_{h \in \mathbb{Z}_+} P_{A_1}(h) (1 - (\lambda(A_1))^{-1} \lambda(X \setminus A_m))^h,$$

即

$$\begin{aligned} \lim_{m \rightarrow \infty} P(\mu: \mu(X \setminus A_m) > 0) \\ \leq 1 - \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{h \in \mathbb{Z}_+} P_{A_1}(h) (1 - (\lambda(A_1))^{-1} \lambda(X \setminus A_m))^h \\ \leq 1 - \sum_{h \in \mathbb{Z}_+} P_{A_1}(h) = 0, \end{aligned}$$

因此  $P(\mu: \mu(X) < \infty) = 1$ .

**2.8. 定理** 设  $\lambda$  是  $(X, \mathcal{A})$  上的分布, 则  $P$  是  $G_\lambda$  型分布当且仅当

$$P = \sum_{h \in \mathbb{Z}_+} P_X(h) Q_\lambda^h.$$

**证明** 1° 首先设  $(X, \rho_X)$  是有界距离空间. 这时因为  $\lambda$  是分布, 故  $\lambda(\cdot) = \lambda(\cdot | X)$ , 又因为  $X \in \mathcal{A}$ , 所以当  $P$  是  $G_\lambda$  型分布时, 必有

$$P = \sum_{h \in \mathbb{Z}_+} P_X(h) Q_{\lambda(\cdot | X)}^h = \sum_{h \in \mathbb{Z}_+} P_X(h) Q_\lambda^h.$$

反之, 如果  $P$  有定理中所述的表达式. 若  $A \in \mathcal{A}$ ,  $\lambda(A) > 0$ , 则有

$$\begin{aligned} A^P &= \sum_{h \in \mathbb{Z}_+} P_X(h) (A Q_\lambda)^h \\ &= \sum_{h \in \mathbb{Z}_+} P_X(h) (1 - \lambda(A)) \delta_0 + Q_{(A\lambda)}^h \\ &= \sum_{h \in \mathbb{Z}_+} P_X(h) ((1 - \lambda(A)) \delta_0 + \lambda(A) Q_{\lambda(\cdot | A)}^h) \\ &= \sum_{n \in \mathbb{Z}_+} \mathcal{D}_{\lambda(A)} P_X(n) Q_{\lambda(\cdot | A)}^n \\ &= \sum_{n \in \mathbb{Z}_+} P_A(n) Q_{\lambda(\cdot | A)}^n, \end{aligned}$$

最后一步, 用到了引理15. 所以  $P$  是  $G_\lambda$  型分布.

2° 现在取消  $(X, \rho_X)$  是有界距离空间的假定。根据 I. § 3, 我们总可以找到一个有界距离空间与  $(X, \rho_X)$  同构。例如可取  $(0, 1)$  的可测子集  $X_1, \rho_{X_1}$  按通常数直线上的距离  $((X_1, \rho_{X_1})$  当然有界), 并使  $(X_1, \rho_{X_1}) \sim (X, \rho_X)$ . 记同构映象为

$$\varphi(x) = x_1, \quad x \in X, \quad x_1 \in X_1.$$

以  $N_\varphi$  记  $(X, \mathscr{A})$  上的全有限计数测度, 即,

$$N_\varphi = \{\mu: \mu \in N, \mu(X) < \infty\}.$$

对任意  $A \in \mathscr{A}(X_1)$ , 令

$$\mu_\varphi(A) = \mu(\varphi^{-1}(A)),$$

则  $\mu \sim \mu_\varphi$  是  $(N_\varphi, N_\varphi \cap \mathbf{N})$  至  $(N(X_1), \mathbf{N}(X_1))$  上的一一映象。又记  $\lambda_\varphi(\cdot) = \lambda(\varphi^{-1}(\cdot))$ , 则  $\lambda_\varphi$  是  $(X_1, \mathscr{A}(X_1))$  上的分布。

现在我们注意, 当  $\lambda$  是分布时,  $G_\lambda$  型分布与相空间为  $(X_1, \rho_{X_1})$  上的  $G_{\lambda_\varphi}$  型分布——对应(用到引理 27)。但  $(X_1, \rho_{X_1})$  是有界距离空间,  $G_{\lambda_\varphi}$  型分布(记作  $P(\lambda_\varphi)$ )有唯一表达式

$$P(\lambda_\varphi) = \sum_{k \in \mathbb{Z}_+} P_X(\lambda_\varphi, k) (Q_{\lambda_\varphi})^k.$$

此处  $P_X(\lambda_\varphi, k) = (P(\lambda_\varphi))(k)$ . 但  $\lambda$  与  $\lambda_\varphi$  一一对应, 因此  $G_\lambda$  型分布  $P$  可唯一表成

$$P = \sum_{k \in \mathbb{Z}_+} P_X(k) Q_\lambda^k.$$

**29. 注记** 上述定理可以用另法证明。简述如下。充分性与上述证明中的 1° 相同。往证必要性, 即假定  $\lambda$  是分布,  $P$  是  $G_\lambda$  型分布, 要证

$$P = \sum_{k \in \mathbb{Z}_+} P_X(k) (Q_\lambda)^k.$$

**证明** 选取集序列  $A_n \in \mathscr{A}, A_n \uparrow X$ ,

$$\begin{aligned} \|P - A_n P\| &= \|P(\mu \in (\cdot)) - P(A_n \mu \in (\cdot))\| \\ &= \|P(\mu \in (\cdot), \mu(X \setminus A_n) > 0) - P(A_n \mu \in (\cdot), \mu(X \setminus A_n) > 0)\| \\ &\leq 2P(\mu: \mu(X \setminus A_n) > 0), \end{aligned}$$

由引理 27 的证明推知

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|P - A_n P\| = 0,$$

由于  $P$  是  $G_\lambda$  型分布, 故对任意的  $k \in \mathbb{Z}_+$ , 有

$$\begin{aligned} &\|P - \sum_{k \in \mathbb{Z}_+} P_X(k) Q_\lambda^k\| \\ &\leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \|P - A_n P\| + \limsup_{n \rightarrow \infty} \|A_n P - \sum_{k \in \mathbb{Z}_+} P_X(k) Q_\lambda^k\| \\ &= \limsup_{n \rightarrow \infty} \left| \sum_{k \in \mathbb{Z}_+} P_{A_n}(k) Q_{\lambda(A_n)}^k - \sum_{k \in \mathbb{Z}_+} P_X(k) Q_\lambda^k \right| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \left| \sum_{k \leq h_0} P_{A_n}(k) Q_{\lambda(\cdot|A_n)}^k - \sum_{k \leq h_0} P_X(k) Q_{\lambda}^k \right| \\
&\quad + \limsup_{n \rightarrow \infty} \sum_{k > h_0} (P_{A_n}(k) + P_X(k)) \\
&\leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \sum_{k \leq h_0} |P_X(k) \cdot Q_{\lambda(\cdot|A_n)}^k - Q_{\lambda}^k| + \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k > h_0} |P_{A_n}(k) - P_X(k)| \\
&\quad + \limsup_{n \rightarrow \infty} (P(\mu: \mu(A_n) > h_0) + P(\mu: \mu(X) > h_0)) \\
&\leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \sum_{k \leq h_0} k P_X(k) \|Q_{\lambda(\cdot|A_n)} - Q_{\lambda}\| + 0 + 2P(\mu: \mu(X) > h_0),
\end{aligned}$$

这里最末一步用到了定理 1.15.

现在注意  $\lambda$  是分布, 则

$$\begin{aligned}
\|Q_{\lambda(\cdot|A_n)} - Q_{\lambda}\| &= \|(\lambda(A_n))^{-1} \lambda(\cdot \cap A_n) - \lambda\| \\
&= \frac{1}{\lambda(A_n)} \|\lambda(\cdot \cap A_n) - \lambda(A_n) \lambda\| \\
&\leq \frac{1}{\lambda(A_n)} (\|\lambda(\cdot \cap A_n) - \lambda\| + (1 - \lambda(A_n)) \|\lambda\|) \\
&= \frac{1}{\lambda(A_n)} \lambda(X \setminus A_n) + 1 - \lambda(A_n),
\end{aligned}$$

所以当  $n \rightarrow \infty$  时  $\|Q_{\lambda(\cdot|A_n)} - Q_{\lambda}\| \rightarrow 0$ , 从而对任意固定的  $h_0$  有

$$P - \sum_{k \leq h_0} P_X(k) Q_{\lambda}^k \leq 2P(\mu: \mu(X) > h_0),$$

令  $h_0 \rightarrow \infty$ , 再应用引理 27 得

$$P = \sum_{k \in \mathbb{Z}_+} P_X(k) Q_{\lambda}^k.$$

应用 Laplace 变换的方法, 定理 26 及定理 28 可以写成下面的形式.

**30. 定理** 设  $\lambda \in M, P \in \mathcal{P}_N$ , 则

1° 如果  $\lambda(X) = \infty$ , 则  $P$  是  $G_\lambda$  型分布当且仅当  $P$  的 Laplace 变换有下述形式: 对任意  $f \in \mathcal{F}_{m+}$ ,

$$\Psi_P(f) = \int \exp\left(-\int (1 - e^{-f(d)}) \lambda(da)\right) \sigma(d),$$

其中  $\sigma$  是  $[0, \infty)$  上的分布;

2° 当  $\lambda(X) = 1$  时,  $P$  是  $G_\lambda$  型分布的充分必要条件为,  $P$  的 Laplace 变换有下述形式: 对任意的  $f \in \mathcal{F}_{m+}$ ,

$$\Psi_P(f) = \sum_{k \in \mathbb{Z}_+} P_X(k) \left( \int e^{-f(d)} \lambda(da) \right)^k.$$

**证明** 在情形 1°, 只须考虑混合型 Poisson 分布的 Laplace 变换; 在情形 2° 只须考虑  $P = \sum_{k \in \mathbb{Z}_+} P_X(k) \cdot Q_{\lambda}^k$  的 Laplace 变换, 应用定理 1.39 就得本定理.

## §6. Cox 过程

**31. 定义** 以  $G_*$  及  $\mathcal{P}_N$  分别记  $(M, \mathbb{M})$  上的全体有限测度及全体概率分布。仍以  $P_\lambda$  记强度测度为  $\lambda$  的 Poisson 分布。设  $G \in \mathcal{P}_N$ , 记

$$P(\cdot) = \int_M P_\lambda(\cdot) G(d\lambda),$$

显然  $P \in \mathcal{P}_N$ , 称之为 Cox 分布; 如果  $G \in G_*$ , 则下述积分

$$\int P_\lambda(\cdot) G(d\lambda)$$

是  $(N, \mathbb{N})$  上的测度, 且属于  $\mathcal{G}_*$ 。这个积分依赖于  $G \in G_*$ , 记为

$$\phi(G) = \int P_\lambda(\cdot) G(d\lambda),$$

也给  $\phi(G)$  一个名称, 称为 Cox 测度。

对于点过程  $\xi$ , 如果它的分布  $P\xi^{-1}$  是 Cox 分布, 则称  $\xi$  是 Cox 过程。

容易求出  $\phi(G)$  的 Laplace 变换。设  $f \in \mathcal{F}_m$ , 则

$$\begin{aligned} \Psi_{\phi(G)}(f) &= \int \left( \int e^{-\mu f} (d\mu) \right) G(d\lambda) \\ &= \int \left( \exp \left\{ - \int (1 - e^{-f(a)}) \lambda(da) \right\} \right) G(d\lambda) = \Psi_G(1 - e^{-f}). \end{aligned}$$

由定理 I.44 已知  $\mathcal{D}_c P_\lambda = P_{c\lambda}$ , 其中  $c \in [0, 1]$ , 现在证明

**32. 引理** 设  $G \in G_*$ ,  $c \in [0, 1]$ , 则

$$\mathcal{D}_c(\phi(G)) = \int P_{c\lambda}(\cdot) G(d\lambda).$$

**证明** 设  $A_1, \dots, A_m \in \mathcal{A}$  且互不相交, 记

$$f = \sum_{i=1}^m 1_{A_i} \log \frac{1}{h_i}, \quad 0 < h_i \leq 1,$$

并记

$$\phi_c(G) = \int P_{c\lambda}(\cdot) G(d\lambda), \quad 0 \leq c \leq 1,$$

显然当  $c=1$  时,  $\phi_c(G) = \phi(G)$ 。又

$$\Psi_{\phi_c(G)}(f) = \int \exp \left( -c \sum_{i=1}^m (1 - h_i) \lambda(A_i) \right) G(d\lambda),$$

但由定理 I.69,

$$\begin{aligned} \Psi_{\mathcal{D}_c \phi(G)}(f) &= \Psi_{\mathcal{D}_c \phi(G)} \left( \sum_{i=1}^m 1_{A_i} \log \frac{1}{h_i} \right) \\ &= \Psi_{\phi(G)} \left( \sum_{i=1}^m 1_{A_i} \log \frac{1}{(1-c) + ch_i} \right) \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
&= \int \mathcal{P}_{c_A} \left( \sum_{i=1}^m 1_{A_i} \log \left( 1 - \frac{1}{1+c} + \frac{1}{c} h_i \right) \right) G(d\lambda) \\
&= \int \exp \left( - \sum_{i=1}^m (1-h_i) \lambda(A_i) \right) G(d\lambda),
\end{aligned}$$

从而得

$$\mathcal{D}_c(\Phi(G))_{A_1, \dots, A_m} = \left( \int \mathcal{P}_{c_A}(\cdot) G(d\lambda) \right)_{A_1, \dots, A_m},$$

所以

$$\mathcal{D}_c(\Phi(G)) = \int \mathcal{P}_{c_A}(\cdot) G(d\lambda) = \Phi_c(G).$$

由上述引理还得, 当  $c \in (0, 1)$  时, 有

$$\mathcal{D}_c \Phi_{c^{-1}A}(G) = \Phi(G).$$

**33. 定理** 由  $\mathcal{S}_M$  到  $\mathcal{S}_N$  内的映象  $G \mapsto \Phi(G)$  是一一的。

**证明** 设  $\lambda \in M$ ,  $A \in \mathcal{A}$ ,  $c \in (0, 1)$ ,  $\varepsilon > 0$ . 对于 Poisson 分布  $P_{c^{-1}A}$  而言, 它的一阶矩测度是  $c^{-1}\lambda(A)$ , 二阶矩是  $c^{-1}\lambda(A)(1 + c^{-1}\lambda(A))$ . 从而由丰贝晓夫不等式可知

$$\begin{aligned}
P_{c^{-1}A}(|c\mu(A) - \lambda(A)| > \varepsilon) &= P_{c^{-1}A}(|\mu(A) - c^{-1}\lambda(A)| > \varepsilon c^{-1}) \\
&\leq \frac{c^{-1}\lambda(A)}{(\varepsilon c^{-1})^2} = c\lambda(A)\varepsilon^{-2}.
\end{aligned}$$

现令  $c_n \downarrow 0$ , 考虑随机变量序列  $\xi_n = c_n \mu(A)$ , 由上式得

$$P_{c_n^{-1}A}(|\xi_n - \lambda(A)| > \varepsilon) \leq c_n \lambda(A) \varepsilon^{-2},$$

所以得到

$$P_{c_n^{-1}A} \xrightarrow{d} \delta_{\lambda(A)}.$$

现设  $A_1, \dots, A_m \in \mathcal{A}$  且互不相交, 考虑  $m$  维随机矢量  $\eta_n = (c_n \mu(A_1), \dots, c_n \mu(A_m))$ , 由上述同理可得

$$P_{c_n^{-1}A} \xrightarrow{d} \delta_{(\lambda(A_1), \dots, \lambda(A_m))}.$$

现设  $h(x)$  是  $R^m = [0, \infty)^m$  上的有界连续函数, 则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int h(x) (P_{c_n^{-1}A} \eta_n^{-1})(dx) = h(\lambda(A_1), \dots, \lambda(A_m)).$$

现设  $G \in \mathcal{S}_M$ , 按控制收敛定理有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int \left( \int h(x) (P_{c_n^{-1}A} \eta_n^{-1})(dx) \right) G(d\lambda) = \int h(x) G_{A_1, \dots, A_m}(dx),$$

由引理32又得

$$\left\{ P_{C_n^{-1} \lambda} \eta_n^{-1}(\cdot) G(d\lambda) = \mathcal{D}_{C_n}^{-1} \left\{ P_{\lambda} \eta_n^{-1}(\cdot) G(d\lambda) \right\} \right.$$

从而得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int h(x) (\mathcal{D}_{C_n}^{-1} \{ P_{\lambda} \eta_n^{-1} G(d\lambda) \}) (dx) = \int h(x) G_{A_1, \dots, A_m} (dx),$$

现在如果有  $G_1, G_2 \in \mathcal{P}_M$ , 使

$$\Phi(G_1) = \int P_{\lambda}(\cdot) G_1(d\lambda) = \int P_{\lambda}(\cdot) G_2(d\lambda) = \Phi(G_2),$$

则自然有

$$\mathcal{D}_{C_n}^{-1} \int P_{\lambda} \eta_n^{-1} G_1(d\lambda) = \mathcal{D}_{C_n}^{-1} \int P_{\lambda} \eta_n^{-1} G_2(d\lambda),$$

故由上面所证可知, 对任意的  $R^m$  上的有界连续函数  $h$  有

$$\int h(d)(G_1)_{A_1, \dots, A_m} (dx) = \int h(x) (G_2)_{A_1, \dots, A_m} (dx),$$

于是

$$(G_1)_{A_1, \dots, A_m} = (G_2)_{A_1, \dots, A_m}.$$

由推论 1.5 得知  $G_1 = G_2$ . 证毕.

**34. 推论** 如果  $\lambda \in M$ ,  $\lambda \neq 0$ ,  $\sigma_1, \sigma_2$  是两个非负随机数分布并且

$$\int P_{l\lambda}(\cdot) \sigma_1(dl) = \int P_{l\lambda}(\cdot) \sigma_2(dl),$$

则  $\sigma_1 = \sigma_2$ .

**证明** 由  $[0, \infty)$  到  $(M, \mathcal{M})$  的映射

$$\varphi: l \mapsto l\lambda$$

显然是可测的. 现设

$$G_1 = \sigma_1 \varphi^{-1}, \quad G_2 = \sigma_2 \varphi^{-1}$$

则  $G_1, G_2 \in \mathcal{P}_M$ . 由条件知

$$\begin{aligned} \int P_{\lambda}(\cdot) G_1(d\lambda) &= \int P_{\lambda}(\cdot) \sigma_1 \varphi^{-1}(d\lambda) \\ &= \int P_{\lambda}(\cdot) \sigma_2 \varphi^{-1}(d\lambda) = \int P_{\lambda}(\cdot) G_2(d\lambda), \end{aligned}$$

从而由定理 33,  $G_1 = G_2$ , 即  $\sigma_1 = \sigma_2$ .

下述定理表明, Cox 分布与  $G_{\lambda}$  型分布的交集正好是混合型 Poisson 分布.

**35. 定理** 设  $\lambda \in M$ ,  $P$  是 Cox 分布. 则  $P$  是  $G_{\lambda}$  型分布的充分必要条件是  $P$  是混合型 Poisson 分布.

**证明** 如果  $P = \int P_{l\lambda}(\cdot) \sigma(dl)$ , 则由引理 21 知  $P$  是  $G_{\lambda}$  型分布, 再由推论 34 的证明可见  $P$  是 Cox 分布.

反之, 如果  $P$  是 Cox 分布同时又是  $G_{\lambda}$  型分布. 若  $\lambda = 0$  则  $P = \delta_0$ , 如果  $\lambda \neq 0$ , 选取  $A \in \mathcal{A}$ , 使  $\lambda(A) > 0$ , 由于  $P$  是  $G_{\lambda}$  型分布, 故

$${}_AP = \sum_{k \in \mathbb{Z}_+} P_A(k) Q_{\lambda(\cdot|A)}^k,$$

然而  $P$  又是 Cox 分布, 从而存在  $G \in \mathcal{S}_H$  使

$$\begin{aligned} P_A(k) &= \int P_A(k; \mu(A) = k) G(d\lambda) \\ &= \int (P_A)_\lambda(k) G(d\lambda) = \int e^{-\lambda(A)} \frac{1}{k!} (\lambda(A))^k G(d\lambda) \\ &= \int e^{-\lambda(A)} \frac{1}{k!} I^k G_A(d\lambda), \end{aligned}$$

从而得到

$$\begin{aligned} {}_AP &= \sum_{k \in \mathbb{Z}_+} \left( \int e^{-\lambda(A)} \frac{1}{k!} I^k G_A(d\lambda) \right) Q_{\lambda(\cdot|A)}^k \\ &= \int \left( \sum_{k \in \mathbb{Z}_+} e^{-\lambda(A)} \frac{1}{k!} I^k Q_{\lambda(\cdot|A)}^k \right) G_A(d\lambda) = \int \left( e^{-\lambda(A)} \sum_{k \in \mathbb{Z}_+} \frac{1}{k!} Q_{\lambda(\cdot|A)}^k \right) G_A(d\lambda) \\ &= \int P_{I\lambda(\cdot|A)}(\cdot) G_A(d\lambda) = \int P_{I'\lambda}(\cdot) G_A^*(d\lambda'), \end{aligned}$$

其中  $I' = (\lambda(A))^{-1}I$ ,  $G_A^*(d\lambda') = G_A(\lambda(A)d\lambda)$ ,  $G_A^*$  是  $[0, \infty)$  上的分布, 所以由

$${}_AP = \left( \int P_{I\lambda}(\cdot) G_A^*(d\lambda) \right),$$

可得到

$$P = \int P_{I\lambda}(\cdot) G_A^*(d\lambda),$$

即  $P$  确是混合型 Poisson 分布。

## §7. 无穷可分混合型 Poisson 过程

**26. 引理** 设  $\lambda \in M$ ,  $A \in \mathcal{A}$ ,  $E \in \mathcal{E}_+$  是  $G_\lambda$  型测度。如果存在  $n \in \mathbb{Z}_+$ ,  $E_1 \in \mathcal{E}_+$ , 使  $E_1^n = E$ , 则  $E_1$  也是  $G_\lambda$  型测度。

**证明** 因为  $E$  是  $G_\lambda$  型测度, 故对任意的  $\lambda \in M$ , 当  $\lambda(A) > 0$  时有

$${}_AE = \sum_{k \in \mathbb{Z}_+} E_A(k) Q_{\lambda(\cdot|A)}^k, \quad (2.1)$$

又因为  $E_1^n = E$ , 所以  $((E_1)_A)^n = E_A$ 。显然

$$\begin{aligned} &\left( \sum_{k \in \mathbb{Z}_+} (E_1)_A(k) Q_{\lambda(\cdot|A)}^k \right)^n \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}_+} E_A(k) Q_{\lambda(\cdot|A)}^k = {}_AE, \end{aligned}$$

由卷积根的唯一性定理, 得

$${}_A E_1 = \sum_{k \in \mathbb{Z}_+} (E_1)_A(k) Q_{A(\cdot)}^k,$$

其次, 当  $\lambda(A) = 0$  时,  ${}_A E = E(N)\delta_0$ , 从而

$${}_A E_1 = \sqrt{E(N)}\delta_0 = E_1(N)\delta_0,$$

所以  $E_1$  是  $G_A$  型测度.

**37. 定理** 设  $P$  是混合型 Poisson 分布且  $\lambda \in M$ ,  $\lambda(X) = \infty$  使

$$P = \int P_{lA}(\cdot) \sigma(dl),$$

则  $P \in \mathcal{P}_1$ , 当且仅当  $\sigma$  是  $[0, \infty)$  上的无穷可分分布.

**证明** 充分性 如果  $\sigma$  是  $[0, \infty)$  上的无穷可分分布, 则对任意的  $n \in \mathbb{Z}_+$ , 存在非负随机数分布  $\gamma$ , 使  $\gamma^n = \sigma$ . 这时由引理 5 得

$$\int P_{lA}(\cdot) \sigma(dl) = \left( \int P_{lA}(\cdot) \gamma(dl) \right)^n,$$

从而  $P$  是无穷可分的, 即  $P \in \mathcal{P}_{1\infty}$ .

必要性 设  $P \in \mathcal{P}_1$  并且  $P = \int P_{lA}(\cdot) \sigma(dl)$ , 欲证  $\sigma$  是无穷可分的. 这时由引理 21 知  $P$  是  $G_A$  型分布, 由引理 36 知, 对任意  $n \in \mathbb{Z}_+$ ,  $1/n P$  亦是  $G_A$  型分布. 由于  $\lambda(X) = \infty$ , 由定理 26 知道  $1/n P$  仍是混合型 Poisson 分布. 从而存在非负随机数分布  $\gamma$ , 使

$$1/n P = \int P_{lA}(\cdot) \gamma(dl),$$

因此

$$P = \left( \int P_{lA}(\cdot) \gamma(dl) \right)^n.$$

由引理 5,

$$P = \int P_{lA}(\cdot) \gamma^n(dl),$$

于是由推论 34 知  $\sigma = \gamma^n$ , 故  $\sigma$  确为无穷可分分布. 定理证毕.

当  $\lambda(X) < \infty$  时, 定理 37 是否成立尚不知道. 因为这时定理 26 对  $\lambda(X) < \infty$  的情形不一定成立.

## §8. 混合型 Poisson 分布的 Campbell 测度

**38. 引理** 设  $\lambda \in M$ ,  $\lambda(X) = \infty$ ,  $P = \int P_{lA}(\cdot) \sigma(dl)$ ; 则存在  $(N, N)$  上的非负可测函数  $\eta(\cdot)$  满足: 对任意的  $A_n \in \mathcal{A}$ ,  $A_n \uparrow X$ , 都有

$$P\left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\mu(A_n)}{\lambda(A_n)} = \eta\right) = 1,$$

而  $\eta$  相对于  $P$  的分布就是  $\sigma$ , 即

$$P(\eta \leq x) = \sigma([0, x]).$$

**证明** 设  $t$  是任意非负实数, 如果  $\sigma = \delta_t$ , 则  $P = P_{tA}$ . 这时令

$$\mu_n = \mu(A_n \setminus A_{n-1}), \quad n \geq 1,$$

则 $\{\mu_n\}$ 相对于 $P$ 是相互独立随机变量序列,  $\mu_n$ 的数学期望和方差都是 $\lambda(A_n \setminus A_{n-1})$ 。利用强大数定理得:

$$P_{1\lambda}(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\lambda(A_n)} \sum_{k=1}^n \mu_k = 1) = 1,$$

现设 $\sigma$ 是 $(0, \infty)$ 上的分布。由于

$$\begin{aligned} P(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\mu(A_n)}{\lambda(A_n)} \text{ 存在})\sigma(dl) &= \int P_{1\lambda}(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\mu(A_n)}{\lambda(A_n)} \text{ 存在})\sigma(dl) \\ &= \int P_{1\lambda}(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\mu(A_n)}{\lambda(A_n)} = 1)\sigma(dl) = 1, \end{aligned}$$

从而 $\frac{\mu(A_n)}{\lambda(A_n)}$ 关于 $P$ 几乎处处收敛于 $(N, \mathbb{N})$ 上的某个非负随机变量 $\eta$ , 并且

$$\begin{aligned} P(\eta \leq x) &= \int P_{1\lambda}(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\mu(A_n)}{\lambda(A_n)} \leq x)\sigma(dl) \\ &= \int_0^x P_{1\lambda}(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\mu(A_n)}{\lambda(A_n)} = 1)\sigma(dl) \\ &= \int_0^x \sigma(dl) = \sigma([0, x]), \end{aligned}$$

现在, 设有另一列 $A'_k \uparrow X$ , 则对任意的 $l \in R_+$ , 亦有

$$P_{1\lambda}(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\mu(A'_n)}{\lambda(A'_n)} = 1) = 1.$$

如果记

$$\eta' = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\mu(A'_n)}{\lambda(A'_n)},$$

则有

$$P(\eta \neq \eta') = \int P_{1\lambda}(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\mu(A_n)}{\lambda(A_n)} \neq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\mu(A'_n)}{\lambda(A'_n)})\sigma(dl) = 0,$$

所以 $\eta = \eta' \ (a.s.P)$ 。

**30. 定理** 设 $P$ 是 $(N, \mathbb{N})$ 上的分布, 则 $P$ 是混合型 Poisson 分布, 当且仅当存在 $\lambda \in M$ 以及非负随机数分布 $\sigma$ , 使

$$\mathcal{P}_P^T(\cdot) = \lambda \times \int l P_{1\lambda}(\cdot) \sigma(dl),$$

而且 $\int l P_{1\lambda}(\cdot) \sigma(dl)$ 是 $(N, \mathbb{N})$ 上的 $\sigma$ 有限测度。

**证明 必要性** 设 $P$ 是混合型 Poisson 分布, 则存在 $\lambda \in M$ 以及非负随机数分布 $\sigma$ 使

$$P(\cdot) = \int P_{1\lambda}(\cdot) \sigma(dl),$$

于是由定理13, 如果 $\mathcal{E}_\mu^T$ 存在, 则

$$\mathcal{E}_\mu^T(\cdot) = \int I_\lambda \times P_{I\lambda}(\cdot) \sigma(dI) = \lambda \times \int IP_{I\lambda}(\cdot) \sigma(dI).$$

现证明 $\int IP_{I\lambda}(\cdot) \sigma(dI)$ 是 $(N, \mathcal{N})$ 上的 $\sigma$ 有限测度。

首先设 $\lambda(X) < \infty$ 。由引理27得

$$P(\mu: \mu(X) < \infty) = 1,$$

令

$$Y_n = \{ \mu: \mu(X) \leq n \}, \quad n = 1, 2, \dots,$$

则 $Y_n \uparrow N$ 而

$$\begin{aligned} & \int IP_{I\lambda}(Y_n) \sigma(dI) \\ &= \int I \sum_{k=0}^n e^{-I\lambda(X)} \frac{1}{k!} \cdot (I\lambda(X))^k \sigma(dI) \\ &= \frac{1}{\lambda(X)} \int \sum_{k=0}^n e^{-I\lambda(X)} \frac{(I\lambda(X))^{k+1}}{(k+1)!} \sigma(dI) \\ &\leq \frac{n+1}{\lambda(X)} \int \sum_{k=0}^{n+1} e^{-I\lambda(X)} \frac{(I\lambda(X))^{k+1}}{(k+1)!} \sigma(dI) \leq \frac{n+1}{\lambda(X)} < \infty, \end{aligned}$$

从而 $\int IP_{I\lambda}(\cdot) \sigma(dI)$ 是 $(N, \mathcal{N})$ 上的 $\sigma$ 有限测度。

现设 $\lambda(X) = \infty$ 。选取 $A_n \in \mathcal{A}$ ,  $A_n \uparrow X$ , 且

$$0 < \lambda(A_n) < \infty, \quad n = 1, 2, \dots,$$

由引理38知

$$\int IP_{I\lambda} \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{\mu(A_n)}{\lambda(A_n)} \text{ 不存在} \right) \sigma(dI) = 0 \quad (1)$$

而对所有的 $x > 0$ 有

$$\int IP_{I\lambda} \left( \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\mu(A_n)}{\lambda(A_n)} \leq x \right) \sigma(dI) = \int_0^x I \sigma(dI) \leq x \sigma([0, x]) < \infty, \quad (2)$$

现今

$$Y_m = \{ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\mu(A_n)}{\lambda(A_n)} \leq m \}, \quad m = 1, 2, \dots,$$

由上面的(1)式,  $Y_m \uparrow N$ , 而由(2)式得

$$\int IP_{I\lambda}(Y_m) \sigma(dI) \leq m \sigma([0, m]) < \infty,$$

这说明 $\int IP_{I\lambda}(\cdot) \sigma(dI)$ 确为 $\sigma$ 有限的。

**充分性** 假定存在 $\lambda \in M$ 以及非负随机数分布 $\sigma$ 使

$$\mathcal{E}_\mu^T(\cdot) = \lambda \times \int IP_{I\lambda}(\cdot) \sigma(dI),$$

由于  $\mathcal{G}_P^T$  是  $\sigma$  有限测度, 因此  $\mathcal{G}_P$  也是  $\sigma$  有限的。现令

$$P' = \int P_{\lambda\lambda}(\cdot)\sigma(d\lambda),$$

则由必要性部分的证明知  $\mathcal{G}_P^T = \lambda \times \int \lambda P_{\lambda\lambda}(\cdot)\sigma(d\lambda)$ 。由 Campbell 测度的唯一性定理,

知  $P = P'$  (注意: 这里的唯一性定理是对  $\mathcal{G}$  而言的, 但  $\mathcal{G}_P^T = \mathcal{G}_P T^{-1}$  其中  $T^{-1}$  是本章 12 段所定义的变换, 因此关于  $\mathcal{G}_P$  的唯一性定理对于  $\mathcal{G}_P^T$  也成立)。证毕。

**40. 定理** 设  $\lambda$  是  $(X, \mathcal{A})$  上的分布, 则在  $M$  上的分布  $P$  是  $G_\lambda$  型分布, 当且仅当

$$\mathcal{G}_P^T = \lambda \times \sum_{k=1}^{\infty} k P(\mu: \mu(X) = k) Q_\lambda^{k-1}.$$

**证明** 必要性 由引理 8, 对任意的  $k \geq 1$ ,

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_{Q_\lambda^k}^T(\cdot) &= k(\mathcal{G}_{Q_\lambda} \otimes Q_\lambda^{k-1})^T = k\left(\int \delta_a \times (\delta_{\partial_a} * Q_\lambda^k)(\cdot) \lambda(da)\right)^T \\ &= k\left(\int (\delta_a \times Q_\lambda^k)(\cdot) \lambda(da)\right) = \lambda \times k Q_\lambda^{k-1}, \end{aligned}$$

从而由定理 28, 如果  $P$  是  $G_\lambda$  型分布, 则

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_P^T &= \sum_{k=1}^{\infty} P_X(k) \mathcal{G}_{Q_\lambda^k}^T = \sum_{k=1}^{\infty} P_X(k) (\lambda \times k Q_\lambda^{k-1}) \\ &= \lambda \times \sum_{k=1}^{\infty} k P_X(k) Q_\lambda^{k-1}. \end{aligned}$$

充分性 与定理 39 的证明一样。

结合定理 39 与定理 40, 我们完全搞清楚了  $G_\lambda$  型分布的 Campbell 测度的结构。因为如果  $\lambda(X) = \infty$ ,  $G_\lambda$  型分布就是混合型 Poisson 分布 (定理 26); 而当  $\lambda(X) < \infty$  时,  $G_\lambda$  型分布的 Campbell 测度由定理 40 给出。

下述定理给出了 Cox 分布的 Campbell 测度。

**41. 定理** 设  $P \in \mathcal{P}_N$ , 则  $P$  是 Cox 分布, 当且仅当

$$\mathcal{G}_P^T = \int (\lambda \times P_\lambda) G(d\lambda).$$

**证明** 与定理 39, 40 一样。

## 第六章 平稳点过程

在点过程的理论研究及实际应用中, 平稳点过程是理论研究开展得最早而实际应用最多的部分。Palm 测度论及平稳点过程的遍历理论已经被研究得相当彻底, 本章将对此作较详细的论述。

### §1. 平稳随机测度

1. 设  $m$  是一个任意固定的正整数,  $(R^m, \rho_{R^m})$  是  $m$  维的欧氏空间, 其中  $\rho_{R^m}$  是通常的欧氏距离。以  $\mathscr{M}, \mathscr{M}^b$  分别记  $R^m$  中的 Borel 集类和有界 Borel 集类。

本章专门讨论以  $(R^m, \rho_{R^m})$  为相空间的随机点过程, 因此除了以  $(R^m, \rho_{R^m})$  取代前面各章中的一般相空间  $(X, \rho_X)$  以外, 其余一切记号的含义都假定在相空间为  $(R^m, \rho_{R^m})$  的条件下给出。例如  $M$  表示  $(R^m, \rho_{R^m})$  上的全体局部有限测度,  $N$  表示其中全体记数测度等等 (按照第 II 章中关于记号的约定,  $M$  与  $N$  本来应记为  $M(R^m)$  和  $N(R^m)$ , 但本章只讨论  $(R^m, \rho_{R^m})$  上的平稳点过程, 因而将  $M(R^m)$  与  $N(R^m)$  简记为  $M, N$  不致引起混淆)。

设  $t \in R^m$ , 令

$$T_t a = a - t, \quad a \in R^m,$$

并称  $T_t$  为推移算子。显然

$$(t, a) \mapsto T_t a$$

是  $R^m \times R^m$  到  $R^m$  的连续映象,

设  $\lambda \in M$ 。对固定的  $t \in R^m$ , 以  $T_t \lambda$  记  $\lambda$  在映象  $T_t: a \mapsto a - t$  之下所诱导的测度, 即

$$(T_t \lambda)(A) = \lambda(A + t), \quad A \in \mathscr{M},$$

其中  $A + t = \{a \in R^m: a - t \in A\}$ 。

2. 引理 映象

$$(t, \lambda) \mapsto T_t \lambda$$

是  $R^m \times M$  到  $M$  的连续映象。

**证明** 设  $t_n \rightarrow t$ ,  $\lambda_n \rightarrow \lambda$ , 又设  $f(\cdot)$  是  $R^m$  上的任意一个具有有界支撑的有界连续函数。于是

$$\int f(a) T_{t_n} \lambda_n(da) = \int f(a - t_n) \lambda_n(da), \quad n = 1, 2, \dots,$$

$$\int f(a) T_t \lambda(da) = \int f(a - t) \lambda(da),$$

以及

$$\left| \int f(a - t_n) \lambda_n(da) - \int f(a - t) \lambda(da) \right|$$



$$\leq \left| \int f(a-t_n) \lambda_n(da) - \int f(a-t) \lambda_n(da) \right| \\ + \left| \int f(a-t) \lambda_n(da) - \int f(a-t) \lambda(da) \right|,$$

任给  $\varepsilon > 0$ , 由于  $\lambda_n \xrightarrow{f} \lambda$ , 故可取  $n_0$ , 使当  $n \geq n_0$  时有

$$\left| \int f(a-t) \lambda_n(da) - \int f(a-t) \lambda(da) \right| < \varepsilon,$$

又因为  $f$  在  $R^m$  上连续且有有界支承, 故不妨设  $f$  在某紧集  $B$  外为 0 且在  $R^m$  上一致连续. 于是由  $t_n \rightarrow t$  可知, 存在  $n'_0$ , 使当  $n \geq n'_0$  时,

$$|f(a-t_n) - f(a-t)| < \varepsilon, \quad a \in R^m,$$

从而只要  $n \geq n'_0$  就有

$$\left| \int f(a-t_n) \lambda_n(da) - \int f(a-t) \lambda(da) \right| < \varepsilon \lambda_n(B),$$

因为  $\lambda_n \xrightarrow{f} \lambda$ ,  $B$  是紧集, 故  $\{\lambda_n(B)\}$  有界. 令

$$r = \sup \{\lambda_n(B)\},$$

则当  $n \geq \max(n_0, n'_0)$  时有

$$\left| \int f(a-t_n) \lambda_n(da) - \int f(a-t) \lambda(da) \right| < \varepsilon + \varepsilon \cdot r,$$

这说明

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int f(a) T_{t_n} \lambda_n(da) = \int f(a) T_t \lambda(da),$$

于是得  $T_{t_n} \lambda_n \xrightarrow{f} T_t \lambda$ .

3. 定义 设  $P$  是  $(M, \mathcal{M})$  上的  $\sigma$  有限测度, 对  $t \in R^m$ , 以  $PT_t^{-1}$  记  $P$  在映射  $\mu \mapsto T_t \mu$  之下所诱导的测度. 如果对所有的  $t \in R^m$ , 都有

$$PT_t^{-1} = P, \quad t \in R^m,$$

则称  $P$  是平稳的.

4. 设  $h$  是  $(M, \mathcal{M})$  上定义的非负可测函数,  $h \in M$ . 令

$$h_n(\lambda) = \left( \frac{1}{2\pi} \right)^n \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} h(x_1, \lambda) L(dx_1), \quad n = 1, 2, \dots,$$

其中  $L$  是 Lebesgue 测度. 记

$$\bar{h}(\lambda) = \limsup_{n \rightarrow \infty} h_n(\lambda),$$

$$\underline{h}(\lambda) = \liminf_{n \rightarrow \infty} h_n(\lambda).$$

下面的定理是测度论中熟知的结果.

**Birkhoff定理:** 设 $P$ 是 $(M, \mathbb{M})$ 上的平稳测度,  $h$ 是 $(M, \mathbb{M})$ 上的任意非负可测函数, 且

$$\int h(\lambda) P(d\lambda) < \infty,$$

则相对于 $P$ 几乎处处有  $\bar{h}(\lambda) = \underline{h}(\lambda)$ , 亦即极限

$$h^*(\lambda) = \lim_{n \rightarrow \infty} h_n(\lambda)$$

几乎处处存在。

应用这一结果, 我们证明

**5. 定理** 设 $P$ 是 $(M, \mathbb{M})$ 上的平稳分布 (即平稳的概率分布), 又设 $h$ 是 $(M, \mathbb{M})$ 上的任意非负可测函数, 且

$$\int h(\lambda) P(d\lambda) < \infty,$$

则有

$$\int h^*(\lambda) P(d\lambda) = \int h(\lambda) P(d\lambda).$$

**证明** 由定义推出

$$\begin{aligned} \int h_n(\lambda) P(d\lambda) &= \int \frac{1}{(2n)^m} \int_{-n}^n \cdots \int_{-n}^n h(T_t \lambda) L(dt) P(d\lambda) \\ &= \frac{1}{(2n)^m} \int_{-n}^n \cdots \int_{-n}^n \int h(T_t \lambda) P(d\lambda) L(dt) \\ &= \frac{1}{(2n)^m} \int_{-n}^n \cdots \int_{-n}^n \int h(\lambda) P(d\lambda) L(dt) = \int h(\lambda) P(d\lambda), \end{aligned}$$

由Birkhoff定理,  $h^*$ 存在(a.e.,  $P$ ), 故由Fatou引理得

$$\begin{aligned} \int h^*(\lambda) P(d\lambda) &= \int \lim_{n \rightarrow \infty} h_n(\lambda) P(d\lambda) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int h_n(\lambda) P(d\lambda) \\ &= \int h(\lambda) P(d\lambda), \end{aligned}$$

如果 $h$ 有界, 则由控制收敛定理得

$$\int h^*(\lambda) P(d\lambda) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int h_n(\lambda) P(d\lambda) = \int h(\lambda) P(d\lambda),$$

如果 $h$ 不是有界的, 对于 $s=1, 2, \dots$ , 令

$$h(s, \lambda) = \min(h(\lambda), s), \quad s=1, 2, \dots,$$

于是 $h^*(s, \lambda) \leq h^*(\lambda)$ , 并且

$$\int h(s, \lambda) P(d\lambda) = \int h^*(s, \lambda) P(d\lambda) \leq \int h^*(\lambda) P(d\lambda),$$

令 $s \rightarrow \infty$ 得

$$\int h(\lambda) P(d\lambda) \leq \int h^*(\lambda) P(d\lambda),$$

结合前面由Fatou引理所得到的不等式即得

$$\int h(\lambda) P(d\lambda) = \int h^*(\lambda) P(d\lambda).$$

上面的定理要求  $\int h(\lambda)P(d\lambda) < \infty$ , 其实这个条件尚可略去。

6. 定理 设  $P$  是  $(M, \mathbb{M})$  上的平稳分布,  $h$  是定义于  $M$  的非负可测函数, 则  $h^*$  相对于  $P$  几乎处处存在, 并且

$$\int h^*(\lambda)P(d\lambda) = \int h(\lambda)P(d\lambda).$$

证明 令

$$h(s, \lambda) = \min (h(\lambda), s), \quad s = 1, 2, \dots,$$

于是  $h^*(s, \lambda)$  存在  $(a.e., P)$ 。以  $D_s$  记  $h^*(s, \lambda)$  不存在的集合, 且记

$$D = \bigcup_{s=1}^{\infty} D_s,$$

则  $P(D) = 0$ 。

现设  $\lambda \in M \setminus D$ 。由于当  $s \uparrow$  时,  $h^*(s, \lambda) \uparrow$ , 令

$$g(\lambda) = \sup_s h^*(s, \lambda), \quad \lambda \in M \setminus D,$$

由于当  $\lambda \in M \setminus D$  时有

$$h^*(s, \lambda) = \lim_{n \rightarrow \infty} h_n(s, \lambda) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} h_n(\lambda),$$

所以

$$g(\lambda) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} h_n(\lambda),$$

于是当  $\lambda \in M \setminus D$  且  $g(\lambda) = +\infty$  时有

$$h^*(\lambda) = g(\lambda) = +\infty.$$

现设  $0 < c < \infty$ , 令

$$Y = \{\lambda: g(\lambda) \leq c\},$$

显然, 若  $\lambda \in Y$ , 则  $T_t \lambda \in Y$ , 因而

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} 1_T(T_t \lambda) h(s, T_t \lambda) L(dt) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} 1_T(\lambda) h(s, T_t \lambda) L(dt) = 1_T(\lambda) \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} h(s, T_t \lambda) L(dt), \end{aligned}$$

于是  $(1_T(\lambda) h(s, \lambda))^*$  对一切  $\lambda \in M \setminus D$  存在并且

$$(1_T(\lambda) h(s, \lambda))^* = 1_T(\lambda) h^*(s, \lambda),$$

由定理 5,

$$\begin{aligned} \int 1_T(\lambda) h(\lambda) P(d\lambda) &= \sup_s \int 1_T(\lambda) h(s, \lambda) P(d\lambda) \\ &= \sup_s \int 1_T h^*(s, \lambda) P(d\lambda) = \int 1_T g(\lambda) P(d\lambda) < \infty. \end{aligned}$$

于是  $1_T(\lambda) h^*(\lambda)$  在  $M$  上几乎处处存在, 从而  $h^*(\lambda)$  在  $\{\lambda: g(\lambda) < \infty\}$  上几乎处处存在。前已证明  $h^*$  在  $\{\lambda: g(\lambda) = \infty\}$  上几乎处处存在, 故  $h^*$  相对于  $P$  几乎处处存在。

当  $\int h(\lambda)P(d\lambda) < \infty$  时, 本定理的结论即是定理 5, 而当  $\int h(\lambda)P(d\lambda) = \infty$  时, 仍由

定理 5 可知

$$\int h(s, \lambda) P(d\lambda) \leq \int h^0(\lambda) P(d\lambda),$$

令  $s \rightarrow \infty$  即得  $\int h^0(\lambda) P(d\lambda) = \infty$ .

7. 定理 设  $P$  是  $(M, \mathcal{M})$  上的平稳分布,  $h$  是定义于  $M$  上的非负可测函数, 且

$$\int h(\lambda) P(d\lambda) < \infty,$$

则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int |h_n(\lambda) - h^0(\lambda)| P(d\lambda) = 0.$$

证明 仍令

$$h(s, \lambda) = \min(h(\lambda), s), \quad s = 1, 2, \dots$$

则

$$\begin{aligned} & \int |h_n(\lambda) - h^0(\lambda)| P(d\lambda) \\ & \leq \int |h^0(\lambda) - h^0(s, \lambda)| P(d\lambda) + \int |h^0(s, \lambda) - h_n(s, \lambda)| P(d\lambda) \\ & \quad + \int |h_n(s, \lambda) - h_n(\lambda)| P(d\lambda), \end{aligned}$$

对右边第一项令  $s \rightarrow \infty$  可得 (由定理 5),

$$\begin{aligned} & \lim_{s \rightarrow \infty} \int |h^0(\lambda) - h^0(s, \lambda)| P(d\lambda) \\ & = \lim_{s \rightarrow \infty} \int (h^0(\lambda) - h^0(s, \lambda)) P(d\lambda) = 0; \end{aligned}$$

对于第二项由控制收敛定理有,

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} \int |h^0(s, \lambda) - h_n(s, \lambda)| P(d\lambda) \\ & = \int \lim_{n \rightarrow \infty} |h^0(s, \lambda) - h_n(s, \lambda)| P(d\lambda) = 0; \end{aligned}$$

对于第三项我们有,

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} \int \left\{ \frac{1}{(2n)^m} \left( \int_{-n}^n \dots \int_{-n}^n h(T_1 \lambda) L(dt) \right. \right. \\ & \quad \left. \left. - \int_{-n}^n \dots \int_{-n}^n h(s, T_1 \lambda) L(dt) \right) \right\} P(d\lambda); \\ & = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \int h(\lambda) P(d\lambda) - \int h(s, \lambda) P(d\lambda) \right) = 0. \end{aligned}$$

定理的结论不难得出。

## §2. 遍历定理

7. 定义 设  $Y \in \mathbb{M}$ , 如果对任意的  $t \in R^m$ , 由  $\lambda \in Y$  可推出  $T_t \lambda \in Y$ , 则称  $Y$  是不变集。显然, 全体不变集作成  $\mathbb{M}$  的一个子  $\sigma$ -代数, 记为  $\bar{\mathbb{M}}$ 。

现设  $P$  是  $(M, \mathbb{M})$  上的平稳分布, 如果对任意  $Y \in \bar{\mathbb{M}}$ , 有  $P(Y) = 0$  或  $1$ , 则称  $P$  是遍历的。 $\bar{\mathbb{M}}$  可测的广义实函数, 称为不变函数。

8. 引理 设  $h$  是定义于  $(M, \mathbb{M})$  上的非负广义实函数, 关于  $\bar{\mathbb{M}}$  可测, 则  $h^*$  是不变函数当且仅当对任意的  $t \in R^m$ ,

$$h(\lambda) = h(T_t \lambda), \quad \lambda \in M.$$

证明 假定对一切  $t \in R^m$ , 都有

$$h(\lambda) = h(T_t \lambda), \quad \lambda \in M,$$

设  $B$  是  $[0, \infty]$  中的任意 Borel 集, 我们要证

$$\{\lambda: h(\lambda) \in B\} \in \bar{\mathbb{M}},$$

事实上, 如果  $\lambda \in \{\lambda: h(\lambda) \in B\}$ , 则由于  $h(T_t \lambda) = h(\lambda)$ , 可知  $T_t \lambda \in \{\lambda: h(\lambda) \in B\}$ , 即  $\{\lambda: h(\lambda) \in B\} \in \bar{\mathbb{M}}$ 。

反之, 如果  $h$  是  $\bar{\mathbb{M}}$  可测的, 则对任意的  $c \geq 0$ ,

$$\{\lambda: h(\lambda) = c\} \in \bar{\mathbb{M}},$$

任取  $\lambda \in \{\lambda: h(\lambda) = c\}$ , 则  $T_t \lambda \in \{\lambda: h(\lambda) = c\}$ , 即

$$h(T_t \lambda) = h(\lambda).$$

9. 引理 对任意  $(M, \mathbb{M})$  上定义的非负可测函数  $h$ ,  $h^*$  是不变函数。

证明 设  $t \in R^m$ , 则当  $s \geq \rho_{R^m}(0, t) = \|t\|$ , 以及  $n > s$  时有

$$\begin{aligned} & \frac{(2n)^{-m}}{(2(n-s))^{-m}} (2(n-s))^{-m} \int_{-(n-s)}^{(n-s)} \cdots \int_{-(n-s)}^{(n-s)} h(T_\tau \lambda) L(d\tau) \\ & \leq (2n)^{-m} \int_{-n}^n \cdots \int_{-n}^n h(T_{t+\tau} \lambda) L(d\tau) \\ & \leq \frac{(2n)^{-m}}{(2(n+s))^{-m}} (2(n+s))^{-m} \int_{-(n+s)}^{n+s} \cdots \int_{-(n+s)}^{n+s} h(T_\tau \lambda) L(d\tau) \end{aligned}$$

当  $n \rightarrow \infty$  即得,

$$h^*(T_t \lambda) = \lim_{n \rightarrow \infty} h_n(T_t \lambda) = h^*(\lambda),$$

于是由引理 8 知  $h^*$  是不变函数。

10. 定理 设  $P$  是  $(M, \mathbb{M})$  上的平稳分布, 则下述命题等价,

- 1)  $P$  是遍历的,
- 2) 对任意  $\bar{\mathbb{M}}$  可测的非负广义实函数  $h$  有

$$h^* = \int h(\lambda) P(d\lambda), \quad (a, e, P),$$

- 3) 对任意的  $Y_1, Y_2 \in \bar{\mathbb{M}}$ , 有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{(2n)^m} \int_{-n}^n \cdots \int_{-n}^n P(Y_1 \cap T_t Y_2) L(dt) = P(Y_1)P(Y_2),$$

4) 如果存在平稳分布  $P_1, P_2$  以及非负数  $\alpha, 0 \leq \alpha \leq 1$ , 使

$$P = \alpha P_1 + (1 - \alpha) P_2,$$

则或者  $\alpha = 0$  或 1, 或者  $P_1 = P_2$ .

**证明** 1)  $\Rightarrow$  2), 设  $P$  遍历, 则对任意的不变集  $Y$  有  $P(Y) = 0$  或 1; 如果  $h$  是任意的非负可测广义实函数, 则由引理 6,

$$\int h^*(\lambda) P(d\lambda) = \int h(\lambda) P(d\lambda),$$

但由引理 9,  $h^*$  是  $\overline{\mathbb{M}}$  可测函数, 从而  $h^*$  只能几乎处处 (相对于  $P$ ) 是常数, 即

$$h^* = \int h(\lambda) P(d\lambda), \quad (a, c, P).$$

2)  $\Rightarrow$  3) 对任意  $n > 0$  及  $Y_1, Y_2 \in \overline{\mathbb{M}}$ , 我们有

$$\begin{aligned} & \int_{Y_1} (2n)^{-m} \int_{-n}^n \cdots \int_{-n}^n 1_{Y_2}(T_{-t}\lambda) L(dt) P(d\lambda) \\ &= (2n)^{-m} \int_{-n}^n \cdots \int_{-n}^n \left( \int_{Y_1} 1_{Y_2}(T_{-t}\lambda) P(d\lambda) \right) L(dt) \\ &= (2n)^{-m} \int_{-n}^n \cdots \int_{-n}^n P(Y_1 \cap T_t Y_2) L(dt), \end{aligned}$$

应用控制收敛定理得,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (2n)^{-m} \int_{-n}^n \cdots \int_{-n}^n P(Y_1 \cap T_t Y_2) L(dt) = \int_{Y_1} 1_{Y_2}^*(\lambda) P(d\lambda),$$

由条件 2) 得,

$$1_{Y_2}^*(\lambda) = \int 1_{Y_2}(\lambda) P(d\lambda) = P(Y_2), \quad (a, c, P),$$

故最后得到,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{(2n)^m} \int_{-n}^n \cdots \int_{-n}^n P(Y_1 \cap T_t Y_2) L(dt) = P(Y_1)P(Y_2).$$

3)  $\Rightarrow$  1) 假定 3) 成立, 设  $Y_1 = Y_2 = Y \in \overline{\mathbb{M}}$ , 于是对任意  $t \in \mathbb{R}^m$ ,  $T_t Y = Y$ . 从而由 3) 得,

$$P(Y) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{(2n)^m} \int_{-n}^n \cdots \int_{-n}^n P(Y \cap T_t Y) L(dt) = (P(Y))^2,$$

所以  $P(Y) = 0$  或 1, 即  $P$  是遍历的.

4)  $\Rightarrow$  1) 用反证法. 如果 1) 不成立, 则存在  $Y \in \overline{\mathbb{M}}$ ,  $0 < P(Y) < 1$ , 令  $\alpha = P(Y)$  则

$$P = \alpha P(\cdot | Y) + (1 - \alpha) P(\cdot | M \setminus Y),$$

从而 4) 不成立. 所以必有 4)  $\Rightarrow$  1).

1)  $\Rightarrow$  4) 假定存在平稳分布  $P_1, P_2$  及实数  $\alpha, 0 \leq \alpha \leq 1$ , 使

$$P = \alpha P_1 + (1 - \alpha) P_2,$$

因为  $P_1 \ll P$ , 故若以  $h$  记  $P_1$  相对于  $P$  的 Radon-Nikodym 导数, 则对任意的  $Y \in \overline{\mathbb{M}}$ , 有

$$P_1(Y) = \int_Y h(\lambda) P(d\lambda),$$

由平稳性, 对一切  $t \in \mathbb{R}^m$  有

$$P_1(Y) = \int_Y h(T_t \lambda) P(d\lambda),$$

故  $h(T_t(\cdot)) = h(\cdot)$ ,  $(a, c, P)$ . 于是

$$\begin{aligned} & \int \left| h_n(\lambda) - h(\lambda) \right| P(d\lambda) \\ &= \int \left| (2n)^{-m} \int_{-n}^n \cdots \int_{-n}^n (h(T_t \lambda) - h(\lambda)) L(dt) \right| P(d\lambda) \\ &\leq (2n)^{-m} \int_{-n}^n \cdots \int_{-n}^n \left( \int \left| h(T_t \lambda) - h(\lambda) \right| P(d\lambda) \right) L(dt) = 0 \end{aligned}$$

这说明  $\int \left| h^*(\lambda) - h(\lambda) \right| P(d\lambda) = 0$ , 即有

$$P_1(Y) = \int_Y h^*(\lambda) P(d\lambda), Y \in \mathbb{M},$$

于是  $h^*$  亦是  $P$  相对于  $P$  的 Radon-Nikodym 导数. 因为  $h^*$  是  $\mathbb{M}$  可测的, 故  $h^* =$  常数  $(a \circ c \circ P)$ , 于是由

$$P_1(Y) = h^* P(Y), Y \in \mathbb{M},$$

知  $h^* = 1(a, c, P)$ , 即  $P_1 = P$ , 类似可证  $P_2 = P$ . 4) 得证. 定理证毕.

### §3. 平稳点过程

11. 定义 如果  $P$  是  $(M, \mathbb{M})$  上的平稳分布, 而且

$$P(N) = 1,$$

则称  $P$  是平稳点分布.

容易看出, 如果  $P$  是平稳点分布, 则对任意的  $t \in \mathbb{R}^m$ , 任意的  $A_1, \dots, A_k \in \mathcal{A}^m$ , 以及任意的非负整数  $j_1, \dots, j_k$  有

$$P(\mu_1 \mu(A_1 + t) = j_1, 1 \leq i \leq k) = P(\mu_1 \mu(A_i) = j_i, 1 \leq i \leq k).$$

反之, 如果  $\Gamma$  是  $\mathcal{A}^m$  的子环, 并且  $L_\sigma(\Gamma) = \mathcal{A}^m$ , 则  $(N, \mathbb{N})$  上的分布  $P$  如果满足条件, 对任意  $t \in \mathbb{R}^m$ , 任意互不相交的  $A_1, \dots, A_k \in \Gamma$ , 以及任意的非负整数  $j_1, \dots, j_k$  有

$$P(\mu_1 \mu(A_i + t) = j_i, 1 \leq i \leq k) = P(\mu_1 \mu(A_i) = j_i, 1 \leq i \leq k),$$

那么  $P$  是平稳点分布.

用定理 1.39 容易证明,  $(N, \mathbb{N})$  上的分布  $P$  是平稳的, 当且仅当: 对任意的  $f \in \mathcal{F}_+$ , 任意的  $t \in \mathbb{R}^m$ , 有

$$\mathcal{T}_P(f) = \mathcal{T}_P(T_t f),$$

其中  $(T_t f)(a) = f(a - t)$ .

12. 引理 在空间  $(\mathcal{S}_N, \rho_{\mathcal{S}_N})$  中, 全体平稳分布组成的类是闭集.

证明 设  $P_n \in \mathcal{S}_+$  是平稳分布,  $n = 1, 2, \dots$ , 又设  $P_n \xrightarrow{w} P \in \mathcal{S}_+$ . 因为对任意的  $t \in \mathbb{R}^m$  及

任意的  $f \in \mathcal{F}_+$ ,  $T_{if}$  也在  $\mathcal{F}_+$  中, 且由诸  $P_n$  的平稳性知

$$\Psi_{P_n}(f) = \Psi_{P_n}(T_{if}), \quad n = 1, 2, \dots,$$

所以由  $P_n \xrightarrow{w} P$  得

$$\Psi_P(f) = \Psi_P(T_{if}),$$

由于  $t \in R^m$  及  $f \in \mathcal{F}_+$  的任意性知  $P$  为平稳分布。

**13. 引理** 设  $P$  是  $(M, \mathcal{M})$  上的平稳分布, 令

$$i_P = I_P(\mathbb{C}(0, 1)^m) = \int \mu(\mathbb{C}(0, 1)^m) P(d\mu) \leq \infty,$$

则有

$$I_P = i_P L,$$

其中  $L$  是 Lebesgue 测度。

**证明** 应用定义 11 后面的讨论, 这结果是显然的。

称  $i_P$  为平稳分布  $P$  的强度。

**14. 定义** 令

$$h(\mu) = \mu(\mathbb{C}(0, 1)^m), \quad \mu \in M,$$

$$S(\mu) = h^* (\mu) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{2^n} \right)^m \int_{-n}^n \dots \int_{-n}^n T_{1\mu}(\mathbb{C}(0, 1)^m) L(dt), \quad \mu \in M,$$

由定理 6, 对任意的平稳分布  $P$  有

$$\int S(\mu) P(d\mu) = \int \mu(\mathbb{C}(0, 1)^m) P(d\mu) = i_P,$$

称  $S(\mu)$  为  $P$  的样本强度函数, 令

$$\sigma_P(A) = P(\mu_1, S(\mu) \in A), \quad A \in \mathcal{B}(\mathbb{C}(0, \infty)),$$

称  $\sigma_P$  为样本强度分布。

上述定义稍许推广一下是有用的。设  $E \in \mathcal{E}_+$ , 如果  $E$  是  $(N, \mathcal{N})$  上的平稳测度则仍有

$$\int S(\mu) E(d\mu) = \int \mu(\mathbb{C}(0, 1)^m) E(d\mu) = i_E \leq \infty,$$

如果  $i_E < \infty$ , 则

$$E(\mu_1, S(\mu) = +\infty) = 0,$$

于是可令

$$\sigma_E(A) = E(\mu_1, S(\mu) \in A), \quad A \in \mathcal{B}(\mathbb{C}(0, \infty)).$$

**15. 引理** 设  $E_1, E_2 \in \mathcal{E}_+$  且为平稳的, 则

$$\sigma_{E_1 * E_2} = \sigma_{E_1} * \sigma_{E_2},$$

如果  $E_1(\mu_1, S(\mu) = +\infty) = E_2(\mu_1, S(\mu) = +\infty) = 0$ , 则

$$(E_1 * E_2)(\mu_1, S(\mu) = +\infty) = 0.$$

**证明** 由定义

$$S(\mu_1 + \mu_2) = S(\mu_1) + S(\mu_2), \quad \mu_1, \mu_2 \in N,$$

于是



$$\begin{aligned}\sigma_{x_1} * \sigma_{x_2}(\cdot) &= (E_1 * E_2)(\mu_1 S(\mu) e(\cdot)) \\ &= (E_1 \times E_2)((\mu_1, \mu_2)_1 S(\mu_1) + S(\mu_2) e(\cdot)) = (\sigma_{x_1} * \sigma_{x_2})(\cdot),\end{aligned}$$

又当  $E_1(\mu_1 S(\mu) = +\infty) = E_2(\mu_2 S(\mu) = +\infty) = 0$  时有

$$\begin{aligned}(E_1 * E_2)(\mu_1 S(\mu) = +\infty) &= (E_1 \times E_2)((\mu_1, \mu_2)_1 S(\mu_1) + S(\mu_2) = +\infty) \\ &= (E_1 \times E_2)((\mu_1, \mu_2)_1 S(\mu_1) = +\infty \text{ 或 } S(\mu_2) = +\infty) = 0.\end{aligned}$$

下述引理今后要用到。

**16. 引理** 设  $P \in \mathcal{P}_N$  是平稳分布,  $P(\{0\}) = 0$ ,

则

$$S(\mu) > 0, (a, c, P).$$

**证明** 由于  $\{\mu: S(\mu) = 0\}$  是不变集, 故如果

$$P(\mu: S(\mu) = 0) > 0,$$

则条件分布

$$P_1(\cdot) = P(\cdot | S(\mu) = 0)$$

是平稳分布。由于

$$i_{P_1} = \int S(\mu) P_1(d\mu) = 0,$$

故  $P_1(\{0\}) = 1$ , 即  $P(\{0\} | S(\mu) = 0) = 1$ , 从而

$$P(\{0\}) > 0,$$

这与假设矛盾。

## §4. 平稳Poisson过程

**17. 定理** 设  $P \in \mathcal{P}_N$  是平稳的。为使  $P$  是以  $l \cdot L$  为强度测度的 Poisson 分布 (其中  $l$  是某个非负实数), 当且仅当  $P$  是有序的和无后效的。

**证明** 必要性 设  $P = P_{lL}$ 。由于  $lL$  作为  $(R^m, \mathcal{M}^m)$  上的测度是扩散的, 所以由定理 I.40 知  $P$  是简单的。又由定理 I.29 知  $P$  是有序的。另外, Poisson 分布总是无后效的。

充分性 首先, 任意的平稳分布必是连续分布。事实上, 如果有  $a \in R^m$ , 使

$$P(\mu: \mu(a) > 0) > 0,$$

则由平稳性知对任意的  $t \in R^m$  都有

$$P(\mu: \mu(a+t) > 0) > 0,$$

但因为

$$\{a \in R^m: P(\mu: \mu(a) > 0) > 0\}$$

至多可数, 于是得到矛盾。所以任意的平稳分布必然是连续分布。

现在令

$$P(\mu: \mu([0, 1]^m) = 0) = \theta,$$

则  $0 \leq \theta \leq 1$ 。记  $\theta = e^{-l}$ , 则  $0 \leq l \leq +\infty$ 。可以证明  $l < \infty$ 。事实上, 如果  $l = +\infty$ , 则  $\theta = 0$ , 从而

$$P(\mu: \mu([0, 1]^m) = 0) = 0,$$

由此并利用  $P$  的平稳性及无后效性可知对任意的正整数  $n$  有:

$$P(\mu: \mu(\zeta 0, \frac{1}{n})^m) = 0) = \theta(\frac{1}{n})^m = 0,$$

从而

$$P(\mu: \mu(\zeta 0, \frac{1}{n})^m) > 0) = 1,$$

令  $n \rightarrow \infty$  即得:

$$P(\mu: \mu(0, \dots, 0) > 0) = 1, \quad (0, \dots, 0) \in R^m,$$

这与  $P$  为连续分布矛盾。于是  $l < +\infty$ 。

为证明  $P = P_{IL}$ , 根据定理 I. 23, 只须证明: 对任意的正数  $t_1, \dots, t_m$  有:

$$\begin{aligned} P(\mu: \mu(\zeta 0, t_1) \times \dots \times \zeta 0, t_m)) &= 0 \\ &= (e^{-1})^{\prod_{i=1}^m t_i} = e^{-l \cdot L((0, t_1) \times \dots \times (0, t_m))}. \end{aligned} \quad (1)$$

为此, 首先利用  $P$  的平稳性及无后效性推出: 对任意的正整数  $p_1, \dots, p_m, q_1, \dots, q_m$ , 有

$$P(\mu: \mu(\zeta 0, p_1/q_1) \times \dots \times \zeta 0, p_m/q_m)) = 0) = (e^{-1})^{\prod_{i=1}^m p_i/q_i},$$

即对任意正有理数  $\gamma_1, \dots, \gamma_m$  有

$$P(\mu: \mu(\zeta 0, \gamma_1) \times \dots \times \zeta 0, \gamma_m)) = 0) = (e^{-1})^{\prod_{i=1}^m \gamma_i} \quad (2)$$

然后对任意给定的正数  $t_1, \dots, t_m$ , 取有理数列  $\gamma_1^{(n)}, \dots, \gamma_m^{(n)}$ , 使当  $n \rightarrow \infty$  时

$$\gamma_i^{(n)} \uparrow t_i, \quad 1 \leq i \leq m,$$

利用(2)式令  $n \rightarrow \infty$  即得欲证之(1)式。定理证毕。

**18. 例** 设  $\sigma$  是  $(0, \infty)$  上的概率分布。且

$$\int_0^\infty l \sigma(dl) = \infty,$$

又设  $L$  是  $R^m$  上的 Lebesgue 测度。考虑混合型 Poisson 分布

$$P(\cdot) = \int P_{IL}(\cdot) \sigma(dL)$$

由于固定  $l > 0$  时,  $P_{IL}$  是平稳简单分布, 故  $P$  也是平稳简单分布。但是

$$\begin{aligned} i_P &= \int \mu(\zeta 0, 1)^m P(d\mu) = \sum_{j=0}^\infty j P(\mu: \mu(\zeta 0, 1)^m = j) \\ &= \sum_{j=0}^\infty j \int \int e^{-l} \frac{l^j}{j!} \sigma(dl) = \int l \sigma(dl) = +\infty, \end{aligned}$$

这个例子说明,  $i_P = \infty$  的平稳简单分布是存在的。一般说来, 任给一个点分布  $P$ , 总有

$$I_{P,0} \leq I_P$$

这里  $P^*$  是与  $P$  对应的简单点分布。但当  $I_P \in M$  并且  $I_{P^*} = I_P$  时, 则  $P = P^*$ 。事实上, 设  $S_n, n = 1, 2, \dots$  是  $X$  中以某点为中心而以  $n$  为半径的球, 由于  $I_{P^*} = I_P \in M$ , 知:

$$\int \mu^*(S_n) P(d\mu) = \int \mu(S_n) P(d\mu), \quad n = 1, 2, \dots,$$

即有

$$\int (\mu - \mu^*)(S_n) P(d\mu) = 0, \quad n = 1, 2, \dots,$$

从而

$$P(\mu: \mu(S_n) \neq \mu^*(S_n)) = 0, \quad n = 1, 2, \dots,$$

所以

$$P(\mu: \mu \neq \mu^*) = 0.$$

但当  $I_P \notin M$  时, 即使  $I_P = I_{P^*}$ , 也不一定  $P = P^*$ 。例如在上面的例子中, 由于  $i_P = \infty$ , 故  $I_P \notin M$ 。此时若以  $Q$  记  $P$  在映象  $\mu \mapsto 2\mu$  之下所诱导出来的分布, 则因为  $Q^* = P$ , 以及  $i_Q \geq i_{Q^*} = i_P = \infty$ ,

可知  $I_Q = I_{Q^*} = I_P \in M$ , 但显然  $Q \neq Q^*$ 。

## §5. Palm 测度

19. 定义 由引理 2 知, 从  $R^m \times N$  到  $R^m \times N$  的映象:

$$(a, \mu) \mapsto (a, T_a \mu)$$

是可测映象。令

$$(T\mu)(\cdot) = \sum_{a \in R^m, \mu(a) > 0} \mu(a) \delta_{(a, T_a \mu)}(\cdot),$$

则  $(T\mu)(\cdot)$  是  $(R^m \times N, \mathcal{M}^m \times \mathcal{N})$  上的测度。

20. 引理 令

$$N^* = \{\mu: \mu \in N, \mu(0, \dots, 0) > 0\}$$

其中  $(0, \dots, 0) \in R^m$ , 则对任意的  $\mu \in N$  有

$$(T\mu)(R^m \times (N \setminus N^*)) = 0.$$

证明 由定义, 对任意  $a \in R^m$ , 如果  $\mu(a) > 0$ , 则

$$(T_a \mu)(0, \dots, 0) = \mu(a) > 0,$$

于是  $T_a \mu \in N^*$ , 从而

$$\begin{aligned} (T\mu)(R^m \times (N \setminus N^*)) \\ = \sum_{a \in R^m, \mu(a) > 0} \mu(a) \delta_{(a, T_a \mu)}(R^m \times (N \setminus N^*)) = 0. \end{aligned}$$

根据这一引理, 对于任意  $\mu \in N$ , 我们可以将  $(T\mu)(\cdot)$  看作是  $\mathcal{M}^m \times N^*$  上的测度, 其中  $N^* = N \cap N^*$ 。

现设  $H$  是  $N$  上的测度, 令

$$T \otimes_H(\cdot) = \int T\mu(\cdot) H(d\mu).$$

21. 引理 设  $H$  是  $(N, \mathcal{N})$  上的平稳测度, 则对任意  $Y \in \mathcal{N}^0$ ,  $A \in \mathcal{A}$ , 以及  $t \in \mathbb{R}^m$ , 有

$$T\mathcal{G}_H(A \times Y) = T\mathcal{G}_H(A + t) \times Y.$$

证明 由平稳性定义推得:

$$\begin{aligned} T\mathcal{G}_H(A \times Y) &= \int \sum_{\tau \in \mathbb{R}^m, \mu(\tau) > 0} 1_A(\tau) 1_Y(T_\tau \mu)(\tau) H(d\mu) \\ &= \int \sum_{\tau \in \mathbb{R}^m, \mu(\tau) > 0} 1_A(\tau) 1_Y(T_\tau T_t \mu) T_t \mu(\tau) H(d\mu) \\ &= \int \sum_{\tau \in \mathbb{R}^m, \mu(t + \tau) > 0} 1_A(\tau) 1_Y(T_{t+\tau} \mu)(t + \tau) H(d\mu) \\ &= \int \sum_{t \in \mathbb{R}^m, \mu(t) > 0} 1_A(t) 1_Y(T_t \mu)(t) H(d\mu) \\ &= \int \sum_{t \in \mathbb{R}^m, \mu(t) > 0} 1_{A+t}(t) 1_Y(T_t \mu)(t) H(d\mu) = T\mathcal{G}_H(A + t) \times Y. \end{aligned}$$

22. 定义 由于上述引理, 当  $H$  是  $(N, \mathcal{N})$  上的平稳测度时, 对任意的  $Y \in \mathcal{N}^0$ , 有

$$T\mathcal{G}_H(A \times Y) = Q(Y)L(A), \quad A \in \mathcal{A}.$$

其中  $Q(Y)$  是  $\mathcal{N}^0$  上的测度. 令  $A = [0, 1]^m$ , 则

$$Q(Y) = T\mathcal{G}_H([0, 1]^m \times Y),$$

称  $Q(\cdot)$  为平稳测度  $H$  的 Palm 测度, 并记作  $H^0$ .

23. 引理 设  $(\Omega, \mathcal{F})$  是任意的可测空间,  $\eta$  是  $(\Omega, \mathcal{F})$  上的测度. 则  $\eta$  是  $\sigma$  有限的, 当且仅当存在定义于  $(\Omega, \mathcal{F})$  上处处严格正的可测函数  $f(\omega)$  使

$$\int f(\omega) \eta(d\omega) < \infty.$$

证明 必要性 设  $\eta$  是  $\sigma$  有限测度, 则存在一列互不相交的  $\Omega_n \in \mathcal{F}$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , 使

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} \Omega_n = \Omega, \quad \eta(\Omega_n) < \infty, \quad n = 1, 2, \dots,$$

不妨设  $\eta(\Omega_n) > 0$ . 定义

$$f(\omega) = \frac{1}{n \eta(\Omega_n)}, \quad \text{当 } \omega \in \Omega_n \text{ 时},$$

则  $f(\omega)$  是处处严格正的可测函数, 并且

$$\int f(\omega) \eta(d\omega) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} < \infty.$$

充分性 设  $f(\omega)$  可测,  $f(\omega) > 0$  凡  $\omega \in \Omega$ , 并且

$$\int f(\omega) \eta(d\omega) < \infty$$

令

$$\Omega_n = \{\omega: f(\omega) \geq \frac{1}{n}\}, \quad n=1, 2, \dots,$$

则  $\Omega_n \in \mathcal{F}$ ,  $\Omega_n \uparrow \Omega$ , 并且

$$\eta(\Omega_n) \leq n \int f(\omega) \eta(d\omega) < \infty, \quad n=1, 2, \dots,$$

所以  $\eta$  是  $\sigma$  有限的。

24. 定理 设  $H$  是  $N$  上的测度,  $H((\cdot) \setminus \{0\})$  是  $\sigma$  有限的, 则  $H$  是平稳的充分必要条  
件为: 存在  $N^0$  上的  $\sigma$  有限测度  $Q$  使

$$T\mathcal{G}_H = L \times Q.$$

证明 必要性 设  $H$  是平稳的。由引理 22 知  $T\mathcal{G}_H = L \times Q$ 。因此只须证明  $Q$  是  $\sigma$  有限  
的。由于  $H((\cdot) \setminus \{0\})$  是  $\sigma$  有限的, 由定理 15 知  $T\mathcal{G}_H$  是  $\sigma$  有限的。于是由引理 23 存在  
 $R^m \times N^0$  上处处为正的 measurable 函数  $f(t, \mu)$  使

$$\int f(t, \mu) T\mathcal{G}_H(dt, \mu) < +\infty,$$

即

$$\int f(t, \mu) T\mathcal{G}_H(d(t, \mu)) = \iint f(t, \mu) L(dt) Q(d\mu) < \infty,$$

然而  $\int f(t, \mu) L(dt)$  在  $N^0$  上处处为正, 故由引理 23 知  $Q$  是  $\sigma$  有限的。

充分性 设  $Q$  是  $N^0$  上的  $\sigma$  有限测度,  $T\mathcal{G}_H = L \times Q$ 。设  $A \in \mathcal{A}^m$ ,  $\tau \in R^m$ ,  $Y \in N^0$ ,  $Q(Y) < \infty$ , 则

$$\begin{aligned} T\mathcal{G}_H(A \times Y) &= L(A)Q(Y) = L(A + \tau)Q(Y) \\ &= \iint_{A+\tau} \delta_{\tau, \mu}(Y) \mu(dt) H(d\mu) = \iint_A \delta_{\tau_1(\tau, \mu)}(Y) (T_{\tau, \mu}(dt) H(d\mu)) \\ &= \iint_A \delta_{\tau, \mu}(Y) \nu(dt) H(T_{\tau, \mu} d\nu) = T\mathcal{G}_H(\tau, \mu_{\varepsilon})(A \times Y). \end{aligned}$$

由唯一性定理 14 知

$$H((\cdot) \setminus \{0\}) = H(T_{\tau, \mu_{\varepsilon}}((\cdot) \setminus \{0\})),$$

对一切  $\tau \in R^m$  成立。因而  $H((\cdot) \setminus \{0\})$  是平稳的, 所以  $H(\cdot) = H((\cdot) \setminus \{0\}) + H(\{0\})\delta_0$  也是  
平稳的。

25 推论 设  $H$  是  $N$  上的平稳测度, 而  $H((\cdot) \setminus \{0\})$  是  $\sigma$  有限的。则对任意定义于  
 $R^m \times N^0$  上的非负 measurable 函数  $f(a, \mu)$  有:

$$\begin{aligned} &\iint f(a, T_a \mu) \mu(da) H(d\mu) \\ &= \int \sum_{a \in R^m, \mu(\{0\}) > 0} f(a, T_a \mu) \mu(da) H(d\mu) = \int f(a, \mu) L \times H^0(da \times d\mu). \end{aligned}$$

证明 由定理 24, 下式

$$\int f(a, \mu) L \times H^0(da \times d\mu) = \int f(a, \mu) T\mathcal{G}_H(d(a, \mu))$$

对任意  $f(a, \mu) = 1_{A \times Y}(a, \mu)$  ( $A \in \mathcal{A}^m, Y \in N^0$ ) 成立。应用单调类定理可得欲证。

本推论中的公式, 习惯上称为魔术公式。它在 Palm 测度论中应用起来是颇为方便

的。

下面给出Palm测度的一些简单性质。如引理13中定义 $i_r$ 一样,我们令

$$i_H = \int \mu(\{0, 1\}^m H(d\mu)).$$

又如定义7,我们以 $\overline{N}$ 记 $N$ 中全体不变子集。

**26. 定理** 如果 $H$ 是 $(N, N)$ 上的平稳测度并且 $H((\cdot) \setminus \{0\})$ 是 $\sigma$ 有限的。则

- 1)  $i_H = H^0(N^0)$ ,
- 2)  $(H((\cdot) \cap Y))^0 = H^0((\cdot) \cap Y)$ ,  $Y \in \overline{N}$ ,
- 3)  $H$ 是简单的当且仅当 $H^0$ 是简单的, 而 $H^0$ 是简单的当且仅当 $H^0(\mu: \mu(0, \dots, 0) > 1) = 0$ 。

**证明** 1)可由 $i_H$ 的定义及推论25中的公式推得。

2) 由 $Y \in \overline{N}$ 可知 $H((\cdot) \cap Y)$ 是平稳测度。现对任意的 $A \in \mathcal{S}^m$ ,  $Y_1 \in N$ , 由于

$$\begin{aligned} T_{\mathcal{S}_H((\cdot) \cap Y)}(A \times Y_1) &= \int T_{\mu}(A \times Y_1) H(Y \cap d\mu) \\ &= T_{\mathcal{S}_H(A \times (Y_1 \cap Y))} = L(A) H^0(Y \cap Y_1), \end{aligned}$$

另一方面, 由定理24得

$$T_{\mathcal{S}_H((\cdot) \cap Y)}(A \times Y_1) = L(A) (H((\cdot) \cap Y))^0(Y_1),$$

由此得证2)。

因为 $N_s \in \overline{N}$ ,  $N \setminus N_s \in \overline{N}$ , 对任意 $A \in \mathcal{S}^m$ 有

$$\begin{aligned} L(A) H^0(N \setminus N_s) &= T_{\mathcal{S}_H(A \times (N \setminus N_s))} \\ &= \iint 1_A(a) 1_{N \setminus N_s}(T_a \mu) \mu(da) H(d\mu) = \iint 1_A(a) 1_{N \setminus N_s}(\mu) \mu(da) H(d\mu) \\ &= \int_{N \setminus N_s} \mu(A) H(d\mu), \end{aligned}$$

由此知 $H^0(N \setminus N_s) = 0$ 当且仅当 $H(N \setminus N_s) = 0$ , 即 $H^0$ 简单当且仅当 $H$ 简单。

如果 $H^0$ 是简单的, 则按定义有

$$H^0(\mu: \mu(0, \dots, 0) > 1) = 0,$$

反之, 如果上式成立, 取 $A \in \mathcal{S}^m$ ,  $0 < L(A) < \infty$ , 令

$$f(a, \mu) = \begin{cases} \mu(0, \dots, 0) - 1, & \text{当 } a \in A, \\ 0, & \text{当 } a \notin A, \end{cases}$$

由推论25得,

$$\begin{aligned} &H(\mu: A \mu \in N \setminus N_s) \\ &\leq \int \sum_{a \in \mathbb{Z}^m, \mu(a) > 0} f(a, T_a \mu) \mu(a) H(d\mu) = \iint f(a, \mu) H^0(d\mu) L(da) \\ &= L(A) \int (\mu(0, \dots, 0) - 1) H^0(d\mu) = 0, \end{aligned}$$

在上式中令 $A \uparrow \mathbb{Z}^m$ , 可推知 $H$ 是简单的, 从而知 $H^0$ 也是简单的。

下述定理给出Palm测度的另一本质刻画, 在应用中它也是很方便的。

**27. 定理** 设 $Q$ 是 $N$ 上的 $\sigma$ 有限测度且满足 $Q(N \setminus N^0) = 0$ . 则 $Q$ 是某个 $\sigma$ 有限测度 $H$ 的Palm测度的充分必要条件是: 在映象

$$(a, \mu) \mapsto (-a, T_a \mu), \quad (a, \mu) \in \mathbb{R}^m \times N^0$$

之下 $\mathscr{G}_0$ 是不变的, 即对任意定义于 $(\mathbb{R}^m \times N^0, \mathscr{M}^m \times N^0)$ 上的非负可测函数 $\varphi(a, \mu)$ 有

$$\int \varphi(-a, T_a \mu) \mathscr{G}_0(d(a, \mu)) = \int \varphi(a, \mu) \mathscr{G}_0(d(a, \mu)).$$

**证明** 必要性 设 $H$   $\sigma$ 有限而 $Q = H^0$ . 由 $\mathscr{G}_0$ 的定义

$$\begin{aligned} \int \varphi(-a, T_a \mu) \mathscr{G}_0(d(a, \mu)) &= \iint \varphi(-a, T_a \mu) \mu(da) H^0(d\mu) \\ &= \iint \varphi(-a, T_a \mu) \mu(da) H^0(d\mu) \cdot \int 1_{(0,1]^m}(t) L(dt), \end{aligned}$$

令

$$f(t, \mu) = \int \varphi(-a, T_a \mu) \mu(da) 1_{(0,1]^m}(t),$$

由推论25得

$$\iint f(t, \mu) (L \times H^0)(d(t, \mu)) = \iint f(t, T_t \mu) \mu(dt) H(dt),$$

但由 $f(\cdot, \cdot)$ 的定义得

$$\begin{aligned} \iint f(t, T_t \mu) \mu(dt) &= \int \left( \int \varphi(-a, T_t T_a \mu) T_t \mu(da) 1_{(0,1]^m}(dt) \right) \mu(dt) \\ &= \int \left( \int \varphi(t-\tau, T_\tau \mu) \mu(d\tau) 1_{(0,1]^m}(t) \right) \mu(dt) = \int g(\tau, T_\tau \mu) \mu(d\tau), \end{aligned}$$

其中

$$g(\tau, T_\tau \mu) = \int \varphi(t-\tau, T_\tau \mu) 1_{(0,1]^m}(t) \mu(dt),$$

再次应用推论25得:

$$\begin{aligned} &\iint g(\tau, T_\tau \mu) \mu(d\tau) H(d\mu) \\ &= \iint \left( \int \varphi(t-\tau, \mu) 1_{(0,1]^m}(t) T_{-\tau} \mu(dt) \right) L \times H^0(d(\tau, \mu)) \\ &= \iint \left( \int \varphi(s, \mu) 1_{(0,1]^m}(\tau+s) \mu(ds) \right) L \times H^0(d(\tau, \mu)) \\ &= \iint \varphi(s, \mu) \mu(ds) H^0(d\mu) = \iint \varphi(s, \mu) \mathscr{G}_{H^0}(d(s, \mu)), \end{aligned}$$

这说明 $\mathscr{G}_0$ 在映象

$$(a, \mu) \mapsto (-a, T_a \mu), \quad (a, \mu) \in \mathbb{R}^m \times N^0$$

之下是不变的.

充分性 设 $Q$ 满足条件 $Q(N \setminus N^0) = 0$ , 并且 $\mathscr{G}_0$ 在上述映象之下不变.

令 $h(a, \mu)$ 是定义于 $(\mathbb{R}^m \times N, \mathscr{M}^m \times N)$ 上的可测函数, 满足

$$\int h(a, \mu) \mu(da) = 1, \quad \mu \in N \setminus \{0\},$$

令

$$H(Y) = \iint 1_T(T_{-a} \mu) h(a, T_{-a} \mu) L \times Q(d(a, \mu)),$$

则  $H$  是  $N$  上的测度且  $H(\{0\}) = 0$ ,

又设  $g(a, \mu)$  是定义于  $(R^m \times N^0, \mathcal{A}^m \times N^0)$  上的任意非负可测函数, 则由  $T\mathcal{G}_H$  的定义得

$$\begin{aligned} & \int g(a, \mu) T\mathcal{G}_H(d(a, \mu)) \\ &= \iint g(a, T_a \mu) \mu(da) H(d\mu) = \int f(a, \mu) L \times Q(d(a, \mu)), \end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned} f(a, \mu) &= h(a, T_{-a} \mu) \int g(s, T_{s-a} \mu) T_{-a} \mu(ds) \\ &= h(a, T_{-a} \mu) \int g(a + \tau, T_{\tau} \mu) \mu(d\tau), \end{aligned}$$

从而

$$\begin{aligned} & \int f(a, \mu) L \times Q(d(a, \mu)) \\ &= \int \{ h(a, T_{-a} \mu) \int g(a + \tau, T_{\tau} \mu) \mu(d\tau) \} L \times Q(d(a, \mu)) \\ &= \iint \{ \int h(a, T_{-a} \mu) g(a + \tau, T_{\tau} \mu) L(da) \} \mu(d\tau) Q(d\mu) \\ &= \int \{ \iint h(s - \tau, T_{\tau-s} \mu) g(s, T_{\tau} \mu) \mu(d\tau) Q(d\mu) \} L(ds) \\ &= \iint h(s - \tau, T_{-s} T_{\tau} \mu) g(s, T_{\tau} \mu) \mathcal{G}_O(d(\tau, \mu)) L(ds), \end{aligned}$$

由于  $\mathcal{G}_O$  在映象  $(\tau, \mu) \mapsto (-\tau, T_{\tau} \mu)$  之下不变, 故又得,

$$\begin{aligned} & \int f(a, \mu) L \times Q(d(a, \mu)) \\ &= \iint h(s + \tau, T_{-s} \mu) g(s, \mu) \mathcal{G}_O(d(\tau, \mu)) L(ds) \\ &= \int \{ \int h(s + \tau, T_{-s} \mu) \mu(d\tau) \} g(s, \mu) L \times Q(d(s, \mu)), \end{aligned}$$

但由  $h$  的选择可知

$$\begin{aligned} & \int h(s + \tau, T_{-s} \mu) \mu(d\tau) \\ &= \int h(t, T_{-s} \mu) (T_{-s} \mu)(dt) = 1, \end{aligned}$$

所以最后得

$$\int g(a, \mu) T\mathcal{G}_H(d(a, \mu)) = \int g(a, \mu) L \times Q(d(a, \mu)),$$

因此  $T\mathcal{G}_H = L \times Q$ , 由定理 24 知  $H$  是平稳的, 且以  $Q$  为其 Palm 测度.

## §6. 反演公式

28. 引理 设  $H$  是  $(N, N)$  上的  $\sigma$  有限测度且为平稳的, 又  $h(\cdot, \cdot)$  是定义于  $R^m \times N$  上



的非负可测函数且  $h(a, 0) = 1$  以及

$$\int h(a, \mu) \mu(da) = 1, \quad \mu \in N \setminus \{0\},$$

则对任意定义于  $(N, \mathbf{N})$  上的非负可测函数  $g(\cdot)$ ,  $g(0) = 0$  有:

$$\int g(\mu) H(d\mu) = \int h(a, T_{-a}\mu) g(T_{-a}\mu) L \times H^0(d(a, \mu)).$$

**证明** 令

$$f(a, \mu) = h(a, T_{-a}\mu) g(T_{-a}\mu),$$

应用推论 25 得

$$\begin{aligned} & \int h(a, T_{-a}\mu) g(T_{-a}\mu) L \times H^0(d(a, \mu)) \\ &= \iint h(a, \mu) g(\mu) \mu(da) H(d\mu) \\ &= \int \left( \int h(a, \mu) \mu(da) \right) g(\mu) H(d\mu) = \int g(\mu) H(d\mu). \end{aligned}$$

下面我们应用上述引理导出一个有用的关于 Palm 测度的反演公式 (定理 30)。为此先给出一些记号。

以  $R_{(0, \infty)}$  记半直线  $(0, \infty)$ , 在  $R_{(0, \infty)}$  上的全体计数测度记为  $\tilde{N}_{(0, \infty)}$ , 相应地有可测空间  $(N_{(0, \infty)}, \mathbf{N}_{(0, \infty)})$ 。

映象  $a \mapsto a_1 = \sqrt{\sum_{i=1}^m a_i^2}$  将  $(R^m, \mathscr{A}^m)$  上的计数测度  $\mu$  变为  $R_{(0, \infty)}$  上的计数测度

$\mu^{(1)} \in N_{(0, \infty)}$ , 其中  $a = (a_1, \dots, a_m) \in R^m$ 。容易验证映象  $\mu \mapsto \mu^{(1)}$  是可测的。

**20. 引理** 设  $H$  是  $\mathbf{N}$  上的平稳测度,  $H((\cdot) \setminus \{0\})$  是  $\sigma$  有限的。则

$$H(\mu: \text{存在 } a_1, a_2 \in R^m, a_1 \neq a_2, \|a_1\| = \|a_2\| \text{ 并且 } \mu(a_1) > 0, \mu(a_2) > 0) = 0.$$

**证明** 以  $\mu^*$  记  $\mu$  所对应的简单计数测度,  $N_s$  记全体简单计数测度, 又  $(\mu^*)^{(1)}$  表示上段中由  $\mu^*$  所确定的计数测度。则  $(\mu^*)^{(1)}(\|a\| \geq 2)$  表示存在  $R^m$  中  $a_1, a_2$ , 满足  $a_1 \neq a_2, \|a_1\| = \|a_2\| = \|a\|$  且

$$\mu(a_1) > 0, \quad \mu(a_2) > 0.$$

显然

$$(a, \mu) \in (\|a\|, (\mu^*)^{(1)})$$

是  $(R^m \times N, \mathscr{A}^m \times \mathbf{N})$  到  $(R_{(0, \infty)} \times \tilde{N}_{(0, \infty)}, dR_{(0, \infty)} \times \mathbf{N}_{(0, \infty)})$  的可测映象。

记

$$Z = \{(a, \mu): (\mu^*)^{(1)}(\|a\| \geq 2)\},$$

则  $Z \in R^m \times \mathbf{N}$ , 于是由推论 25 得

$$\iint 1_Z(a, \mu) \mu(da) H(d\mu) = \iint 1_Z(a, T_{-a}\mu) L \times H^0(da \times d\mu),$$

因为

$$\int 1_Z(a, T_{-a}\mu) L(da) = L(a: \{(a, T_{-a}\mu) \in Z\} \subseteq L(a: \mu(a) > 0) = 0,$$

从而

$$\iint 1_x(a, \mu) \mu(da) H(d\mu) = 0,$$

这说明

$$\int 1_x(a, \mu) \mu(da) = 0, \quad (a, e, H),$$

这显然表明

$$H(\mu: \text{存在 } a_1, a_2 \in R^m, a_1 \neq a_2, \|a_1\| = \|a_2\|, \text{ 并且 } \mu(a_1) > 0, \mu(a_2) > 0) = 0.$$

引理证毕。

**30. 定理** 设  $H$  是  $N$  上的平稳测度,  $H((\cdot) \setminus \{0\})$  是  $\sigma$  有限的。则对任意的  $Y \in N$  有

$$H(Y \setminus \{0\}) = \int \frac{1}{\mu(0, \dots, 0)} \int_{\{a: \mu(S_{\|a\|}(a)) = 0\}} 1_Y(T_a \mu) L(da) H^0(d\mu),$$

其中  $S_{\|a\|}(a)$  表示以  $a$  为中心, 以  $\|a\|$  为半径的开球。

**证明** 令

$$h(a, \mu) = \begin{cases} \frac{1}{\mu(\{t: \|t\| = \|a\|\})}, & \text{如果 } \mu(\{t: \|t\| = \|a\|\}) > 0 \text{ 且} \\ & \mu(\{t: \|t\| < \|a\|\}) = 0; \\ 0, & \text{其余,} \end{cases}$$

则显然

$$\int h(a, \mu) \mu(da) = 1, \quad \mu \in N \setminus \{0\},$$

于是由引理28得,

$$H(Y \setminus \{0\}) = \iint 1_Y(T_{-a} \mu) h(a, T_{-a} \mu) L(da) H^0(d\mu),$$

由引理29得,

$$\begin{aligned} H(Y \setminus \{0\}) &= \int \frac{1}{\mu(0, \dots, 0)} \int_{\{a: \mu(S_{\|a\|}(a)) = 0\}} 1_Y(T_{-a} \mu) L(da) H^0(d\mu) \\ &= \int \frac{1}{\mu(0, \dots, 0)} \int_{\{a: \mu(S_{\|a\|}(a)) = 0\}} 1_Y(T_a \mu) L(da) H^0(d\mu). \end{aligned}$$

定理得证。

## §7. Korolyuk 定理

**31. 定理 (Korolyuk)** 设  $H$  是  $(N, N)$  上的平稳测度。记

$$A_n = [0, n^{-1})^m, \quad n = 1, 2, \dots$$

则有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^m H(\mu: \mu(A_n) > 0) = i_{\pi}.$$

其中  $H^*$  是对应于  $H$  的简单平稳测度, 即  $H^*$  是在映像  $\mu \sim \mu^*$  之下由  $H$  所诱导的测度。

**证明** 对任意的  $n > 0$ , 总有

$$\begin{aligned} H(\mu: \mu(A_n) > 0) &= H(\mu: \mu^{\otimes}(A_n) > 0) \\ &= H^{\otimes}(\mu: \mu(A_n) > 0), \end{aligned}$$

因此不妨假定  $H$  是简单的。

如果对一切  $n$  都有  $H(\mu: \mu(A_n) > 0) = +\infty$ , 则有  $i_n = +\infty$ , 此时定理中的结论显然成立。因此不妨设存在  $n_0$ , 使  $H(\mu: \mu(A_{n_0}) > 0) < +\infty$ , 这时对任意有界集  $A \in \mathcal{M}^m$ , 必存在  $t_1, \dots, t_j \in \mathbb{R}^m$ , 使

$$A \subset \bigcup_{i=1}^j (A_{n_0} + t_i),$$

从而由平稳性知

$$\begin{aligned} H(\mu: \mu(A) > 0) &\leq \sum_{i=1}^j H(\mu: \mu(A_{n_0} + t_i) > 0) \\ &= jH(\mu: \mu(A_{n_0}) > 0) < +\infty, \end{aligned}$$

这说明  $H(\{\cdot\} \setminus \{0\})$  是  $\sigma$  有限的。

由于  $H$  是简单的, 由定理 26 知  $H^{\otimes}$  也是简单的。应用定理 30 得

$$\begin{aligned} H(\mu: \mu(A_n) > 0) &= \int \int_{\{a: \mu(S_{\|a\|}(a)) = 0\}} 1_{\{\mu: \mu(A_n) > 0\}}(T_a \mu) L(da) H^{\otimes}(d\mu) \\ &= \int \int_{\{a: \mu(S_{\|a\|}(a)) = 0\}} 1_{\{a: \mu(A_n + a) > 0, \mu(S_{\|a\|}(a)) = 0\}}(a) L(da) H^{\otimes}(d\mu) \\ &= \int L(a: a \in \mathbb{R}^m, \mu(A_n + a) > 0, \mu(S_{\|a\|}(a)) = 0) H^{\otimes}(d\mu) \\ &= \int L(a: a \in \mathbb{R}^m, \mu(A_n - a) > 0, \mu(S_{\|a\|}(-a)) = 0) H^{\otimes}(d\mu), \end{aligned}$$

固定正整数  $j$ , 令

$$Y_j = \{\mu: \mu \in N^{\otimes}, \mu \in N_S, \mu(S_{\|a\|}(\{0, \dots, 0\} \setminus \{0, \dots, 0\})) = 0\},$$

则得

$$\begin{aligned} &\liminf_{n \rightarrow \infty} (n^m H(\mu: \mu(A_n) > 0)) \\ &\geq \liminf_{n \rightarrow \infty} n^m \int_{Y_j} L(a: a \in \mathbb{R}^m, \mu(A_n - a) > 0, \mu(S_{\|a\|}(-a)) = 0) H^{\otimes}(d\mu), \end{aligned}$$

现在当  $n > 2\sqrt{m}j$  时, 如果  $\mu \in Y_j$ , 则必有

$$A_n \subset \{a: a \in \mathbb{R}^m, \mu(A_n - a) > 0, \mu(S_{\|a\|}(-a)) = 0\},$$

所以

$$\begin{aligned} &\liminf_{n \rightarrow \infty} (n^m H(\mu: \mu(A_n) > 0)) \geq \liminf_{n \rightarrow \infty} n^m \int_{Y_j} L(A_n) H^{\otimes}(d\mu) \\ &= \liminf_{n \rightarrow \infty} H^{\otimes}(Y_j) = H^{\otimes}(Y_j), \quad j = 1, 2, \dots, \end{aligned}$$

令  $j \rightarrow \infty$ , 则得

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} n^m H(\mu: \mu(A_n) > 0) \geq H^0(N^0) = i_H \quad (1)$$

另一方面, 由  $H$  的平稳性可得

$$\begin{aligned} i_H L(A_n) &= H^0(N^0) L(A_n) \\ &= \int \mu(A_n) H(d\mu) \geq H(\mu: \mu(A_n) > 0), \end{aligned}$$

且因为  $L(A_n) \sim n^{-m}$ , 所以

$$n^m H(\mu: \mu(A_n) > 0) \leq i_H. \quad (2)$$

由(1)与(2)得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^m H(\mu: \mu(A_n) > 0) = i_H.$$

定理证毕。

**32. 定理** 设  $H$  是  $(N, \mathbf{N})$  上的平稳测度, 又  $i_H < \infty$ ,  $A_n = [0, \frac{1}{n})^m$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , 则

下述命题等价,

- 1)  $H$  是简单的;
- 2)  $\lim_{n \rightarrow \infty} n^m H(\mu: \mu(A_n) = 1) = i_H$ ;
- 3)  $\lim_{n \rightarrow \infty} n^m H(\mu: \mu(A_n) > 0) = i_H$ ;
- 4)  $\lim_{n \rightarrow \infty} n^m H(\mu: \mu(A_n) > 1) = 0$ .

**证明** 1)  $\Rightarrow$  2) 当  $H = H^0$  时, 只要在定理 31 的证明中以  $\{\mu: \mu(A_n) = 1\}$  代替  $\{\mu: \mu(A_n) > 0\}$  即可。

2)  $\Rightarrow$  3) 由于

$$n^m H(\mu: \mu(A_n) > 0) \leq i_H, \quad n = 1, 2, \dots$$

3)  $\Rightarrow$  4) 由于

$$\begin{aligned} H(\mu: \mu(A_n) > 1) &= \sum_{j=2}^{\infty} H(\mu: \mu(A_n) = j) \\ &\leq \sum_{j=1}^{\infty} j H(\mu: \mu(A_n) = j) - \sum_{j=1}^{\infty} H(\mu: \mu(A_n) = j) \end{aligned}$$

从而

$$n^m H(\mu: \mu(A_n) > 1) \leq i_H - n^m H(\mu: \mu(A_n) > 0).$$

4)  $\Rightarrow$  1) 由于

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{n \rightarrow \infty} n^m H(\mu: \mu(A_n) > 1) \geq \lim_{n \rightarrow \infty} n^m H(\mu: (\mu - \mu^0)(A_n) > 0) \\ &\geq H(\mu: (\mu - \mu^0)([0, 1)^m) > 0), \end{aligned}$$

由此推知  $H(\mu: \mu \neq \mu^0) = 0$ .

## §8. Palm 分布

**33. 定义** 设  $H$  是  $(N, \mathbf{N})$  上的平稳测度, 满足条件:  $0 < i_\mu < \infty$ . 于是  $H(\cdot | \cdot) \setminus \{0\}$  是  $\sigma$  有限的. 令

$$H_0 = i_\mu^{-1} H^0 = (H^0(N^0))^{-1} H^0,$$

称  $H_0$  为  $H$  的 palm 分布.

特别, 当  $H \in \mathcal{P}_{\mathcal{S}}$  且  $0 < i_\mu < \infty$  时, 记  $P$  的 palm 分布为  $P_0$ .

**34. 引理** 设  $P \in \mathcal{S}$  是平稳分布,  $0 < i_\mu < \infty$ ,  $Y \in \bar{\mathbf{N}}$ ,  $0 \notin Y$ . 则  $P(Y) > 0$  当且仅当  $P_0(Y) > 0$ , 而且在  $P(Y) > 0$  的条件下有

$$(P(\cdot | Y))_0 = P_0(\cdot | Y).$$

**证明** 因为  $Y \in \bar{\mathbf{N}}$ , 所以

$$\begin{aligned} P_0(Y) &= i_\mu^{-1} P^0(Y) = i_\mu^{-1} \cdot \iint 1_{[0, 1)}(t) 1_Y(T \cup t) \mu(dt) P(d\mu) \\ &= i_\mu^{-1} \cdot \iint 1_{[0, 1)}(t) 1_Y(t) (\mu) \mu(dt) P(d\mu) = i_\mu^{-1} \cdot \int_Y \mu([0, 1)^m) P(d\mu), \end{aligned}$$

所以  $P_0(Y) > 0$  等价于  $P(Y) > 0$ . 又由定义得

$$\begin{aligned} (P(\cdot | Y))_0 &= i_\mu^{-1} \cdot i_{P(Y)}(P(\cdot | Y)) \\ &= i_\mu^{-1} \cdot i_{P(Y)} \left( \frac{P(\cdot \cap Y)}{P(Y)} \right) = i_\mu^{-1} \cdot i_{P(Y)} \cdot \frac{1}{P(Y)} P^0(\cdot \cap Y), \end{aligned}$$

然而

$$i_{P(Y)} = \frac{1}{P(Y)} \int_Y \mu([0, 1)^m) P(d\mu) = \frac{P^0(Y)}{P(Y)},$$

所以最后得

$$\begin{aligned} (P(\cdot | Y))_0 &= \left( \frac{P(Y)}{P^0(Y)} \right) \cdot \frac{P^0(\cdot \cap Y)}{P(Y)} = \frac{P^0(\cdot \cap Y)}{P^0(Y)} \\ &= \frac{i_\mu^{-1} \cdot P^0(\cdot \cap Y)}{i_\mu^{-1} \cdot P^0(Y)} = \frac{P^0(\cdot \cap Y)}{P^0(Y)} = P_0(\cdot | Y). \end{aligned}$$

引理得证.

**35. 定理** 设  $P$  是  $(N, \mathbf{N})$  上的平稳分布, 并且  $0 < i_\mu < \infty$ . 则  $P$  是遍历的充分必要条件为:  $P(0) = 0$ , 并且对任意的  $Y \in \bar{\mathbf{N}}$ ,  $0 \notin Y$ ,  $P_0(Y)$  等于 0 或 1.

**证明** 如果  $P$  是遍历的, 则由于  $\{0\} \in \bar{\mathbf{N}}$ , 故  $P(0) = 0$  或 1; 但由条件  $0 < i_\mu < \infty$  知  $P(0) \neq 1$ , 所以只能有  $P(0) = 0$ .

现设  $Y \in \bar{\mathbf{N}}$ ,  $0 \notin Y$ ,  $P(Y) = 0$  或 1. 由引理 34, 如果  $P(Y) = 0$  则  $P_0(Y) = 0$ ; 如果

$P(Y) = 1$ , 则  $P_0(Y) = P(Y) = 1$ .

反之, 如果  $Y \in \bar{N}$ ,  $0 \notin Y$ ,  $P(0) = 0$ , 由引理 34, 当  $P_0(Y) = 0$  则  $P(Y) = 0$ ; 当  $P_0(Y) = 1$  则  $P(Y) = 1$ , 因此  $P$  遍历。

**36. 定义** 设  $H$  是  $(N, N)$  上的平稳测度, 且  $H((\cdot) \setminus \{0\})$  是  $\sigma$  有限的。<sup>\*</sup> 令

$$Y_0 = \{\mu: \text{不存在 } a_1, a_2 \in R^m, \text{ 使 } a_1 \neq a_2, \|a_1\| = \|a_2\|, \mu(a_1) > 0, \mu(a_2) > 0\},$$

由引理 29,  $H(N \setminus Y_0) = 0$ .

现设  $\mu \in Y_0$ , 于是存在唯一的  $teR^m$ , 满足:  $\mu(t) > 0$ , 且对一切适合  $\|a\| < \|t\|$  的  $a \in R^m$ , 都有  $\mu(a) = 0$ . 记这个点为  $t(\mu)$ .

**37. 引理** 由  $Y_0$  到  $R^m$  的映象  $\mu \mapsto t(\mu)$  关于  $\sigma$  代数  $Y_0 \cap N$  及  $\mathcal{M}^m$  是可测的,

**证明** 设  $A \in \mathcal{M}^m$ , 则

$$\{\mu: t(\mu) \in A\} = \bigcup_{0 < r_1 < r_2} \{\mu: \mu(a: \|a\| < r_1) = 0\},$$

$$\mu(a: r_1 \leq \|a\| < r_2) = \mu(\{a: r_1 \leq \|a\| < r_2\} \cap A) = 1\}, \quad \text{因 } \bar{N}$$

其中  $r_1, r_2$  跑遍一切非负有理数。证毕。

现对于  $A \in \mathcal{M}^m$ , 仍用  $A\mu$  表示  $\mu$  在  $A$  上的限制, 于是  $\mu \mapsto T_{t(\mu)}\mu$  是  $N$  到自身的可测映象。

**38. 定理** 设  $H$  是  $(N, N)$  上的简单平稳测度,  $0 < i_n < \infty$ . 又设  $A_n = \left[0, \frac{1}{n}\right)^m$ ,

$n = 1, 2, \dots$ . 则当  $n \rightarrow \infty$  时

$$\|H(T_{t(A_n\mu)}\mu \varepsilon(\cdot) | \mu(A_n) > 0) - H_0\| \rightarrow 0.$$

**证明** 由于

$$\begin{aligned} & \|H_0 - H(T_{t(A_n\mu)}\mu \varepsilon(\cdot) | \mu(A_n) > 0)\| \\ & \leq \|H_0 - i_n^{-1} n^m H(\mu: \mu(A_n) > 0) H(T_{t(A_n\mu)}\mu \varepsilon(\cdot) | \mu(A_n) > 0)\| \\ & \quad + \|(i_n^{-1} n^m H(\mu: \mu(A_n) > 0) - 1) H(T_{t(A_n\mu)}\mu \varepsilon(\cdot) | \mu(A_n) > 0)\|, \end{aligned}$$

由定理 32, 上式右边第 2 项当  $n \rightarrow \infty$  时趋于 0. 所以

$$\begin{aligned} & \limsup_{n \rightarrow \infty} \|H_0 - H(T_{t(A_n\mu)}\mu \varepsilon(\cdot) | \mu(A_n) > 0)\| \\ & \leq i_n^{-1} \limsup_{n \rightarrow \infty} \|H_0 - n^m \int_{\{\mu: \mu(A_n) > 0\}} 1_{(\cdot)}(T_{t(A_n\mu)}\mu) H(d\mu)\| \\ & \leq 2i_n^{-1} \limsup_{n \rightarrow \infty} \sup_{Y \in N^0} \left| H^0(Y) - n^m \int_{\{\mu: \mu(A_n) > 0\}} 1_Y(T_{t(A_n\mu)}\mu) H(d\mu) \right| \\ & = 2i_n^{-1} \limsup_{n \rightarrow \infty} \sup_{Y \in N^0} \left| n^m \iint_{A_n} 1_Y(T_{a\mu}) \mu(da) H(d\mu) \right. \\ & \quad \left. - n^m \int_{\{\mu: \mu(A_n) > 0\}} 1_Y(T_{t(A_n\mu)}\mu) H(d\mu) \right| \end{aligned}$$

$$\leq 2i_n^{-1} \limsup_{n \rightarrow \infty} n^m \int_{\{\mu(A_n) > 0\}} (\mu(A_n) - 1) H(d\mu) \\ = 2i_n^{-1} \limsup_{n \rightarrow \infty} (i_n - n^m H(\mu|_{\mu(A_n) > 0})) = 0.$$

39. 定理 在定理38的假定之下, 有

$$H(\cdot | \mu(A_n) > 0) \xrightarrow{w} H_0.$$

证明 设  $h$  是  $(N, \rho_N)$  上的任意有界连续函数. 由定理38得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int h(T_{t(A_n)\mu} \mu) H(d\mu | \mu(A_n) > 0) = \int h(\mu) H_0(d\mu),$$

于是

$$\begin{aligned} & \limsup_{n \rightarrow \infty} \left| \int h(\mu) H(d\mu | \mu(A_n) > 0) - \int h(\mu) H_0(d\mu) \right| \\ & \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \left| \int h(\mu) - h(T_{t(A_n)\mu} \mu) \right| H(d\mu | \mu(A_n) > 0) \\ & \quad + \limsup_{n \rightarrow \infty} \left| \int h(T_{t(A_n)\mu} \mu) H(d\mu | \mu(A_n) > 0) - \int h(\mu) H_0(d\mu) \right| \\ & \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \int \sup_{\|t\| < \sqrt{m}/n} |h(T_t \mu) - h(\mu)| H(T_{t(A_n)\mu} \mu, d\mu | \mu(A_n) > 0) \\ & \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \int \sup_{\|t\| < \sqrt{m}/n} |h(T_t \mu) - h(\mu)| H_0(d\mu). \end{aligned}$$

最后的不等号再次用到定理38. 因为当  $n \rightarrow \infty$  时

$$\sup_{\|t\| < \sqrt{m}/n} |h(T_t \mu) - h(\mu)| \rightarrow 0,$$

所以由上面的不等式推知:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int h(\mu) H(d\mu | \mu(A_n) > 0) = \int h(\mu) H_0(d\mu).$$

40. 上面的定理38及定理39是对简单平稳测度而言的. 当  $H$  是平稳而非简单时, 上述结论必须作些改变.

设  $H$  平稳,  $0 < i_n < \infty$ , 又设  $H^0$  是与之对应的简单平稳测度. 对于  $Y \in \mathbf{N}^0$ , 令

$$H_j(Y) = i_n^{-1} \iint 1_{(0,1)^m}(a) 1_Y(T_a \mu) \mu^*(da) H(d\mu),$$

这是  $\mathbf{N}^0$  上的分布. 对于  $j \geq 1$  有

$$\begin{aligned} & H_j(\mu_1 \mu_2 Y, \mu(0, \dots, 0) = j) \\ & = i_n^{-1} \iint 1_{(0,1)^m}(a) 1_{\{\mu: \mu \in Y, \mu(0, \dots, 0) = j\}}(T_a \mu) \mu^*(da) H(d\mu) \\ & = i_n^{-1} \int \int 1_{(0,1)^m}(a) 1_{\{\mu: \mu \in Y, \mu(0, \dots, 0) = j\}}(T_a \mu) \mu(da) H(d\mu) \\ & = \left( i_n^{-1} \cdot i_n \cdot \frac{1}{j} \right). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \times \left( i_n^{-1} \iint_{(0,1)^m} 1_{\{\mu: \mu \in Y, \mu(0, \dots, 0) = j\}} (T_a^\mu) \mu(da) H(d\mu) \right) \\ & = \left( i_n^{-1} \cdot i_n \cdot \frac{1}{j} \right) H_0(\mu: \mu \in Y, \mu(0, \dots, 0) = j), \end{aligned}$$

于是就有

$$H_A(Y) = i_n^{-1} \cdot i_n \cdot \sum_{j=1}^m \frac{1}{j} H_0(\mu: \mu \in Y, \mu(0, \dots, 0) = j)$$

特别得

$$i_{n^0} = i_n \sum_{j=1}^m H_0(\mu: \mu(0, \dots, 0) = j) / j,$$

这时定理38及39可相应地作如下改动。

41. 定理 设  $H$  是平稳测度,  $0 < i_n < \infty$ , 又设  $A_n = [0, \frac{1}{n}]^m$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , 则当  $n \rightarrow \infty$  时, 有

$$\|H(T_{t(A_n)\mu}, \mu \epsilon(\cdot) | \mu(A_n) > 0) - H_A\| \rightarrow 0,$$

以及

$$H(\cdot | \mu(A_n) > 0) \xrightarrow{w} H_A.$$

然而这个结果可以更进一步, 也就是

42. 定理 在定理41的假定之下, 如果

$$H_0(\mu: \mu(0, \dots, 0) = j) > 0$$

则当  $n \rightarrow \infty$  时

$$\|H(T_{t(A_n)\mu}, \mu \epsilon(\cdot) | \mu(A_n) = j) - H_0(\cdot | \mu(0, \dots, 0) = j)\| \rightarrow 0.$$

证明 由于

$$\begin{aligned} \frac{H(\mu: \mu(A_n) = j)}{H(\mu: \mu(A_n) > 0)} &= H(\mu(A_n) = j | \mu(A_n) > 0) \\ &= H((T_{t(A_n)\mu}, \mu)(0, \dots, 0) = j | \mu(A_n) > 0), \end{aligned}$$

所以

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{H(\mu: \mu(A_n) = j)}{H(\mu: \mu(A_n) > 0)} = i_n^{-1} \cdot i_n \cdot \frac{1}{j} H_0(\mu: \mu(0, \dots, 0) = j),$$

所以

$$\begin{aligned} & \limsup_{n \rightarrow \infty} \|H(T_{t(A_n)\mu}, \mu \epsilon(\cdot) | \mu(A_n) = j) - H_0(\cdot | \mu(0, \dots, 0) = j)\| \\ &= \limsup_{n \rightarrow \infty} \|H(T_{t(A_n)\mu}, \mu \epsilon(\cdot), \mu(A_n) = j | \mu(A_n) > 0) \\ & \times \frac{H(\mu: \mu(A_n) > 0)}{H(\mu: \mu(A_n) = j)} - \frac{H_0(\mu: \mu \epsilon(\cdot), \mu(0, \dots, 0) = j)}{H_0(\mu: \mu(0, \dots, 0) = j)}\| \\ & \leq \frac{j i_n^0}{i_n H_0(\mu: \mu(0, \dots, 0) = j)} \limsup_{n \rightarrow \infty} \|H(T_{t(A_n)\mu}, \mu \epsilon(\cdot) | \mu(A_n) > 0) \\ & - H_A\| = 0. \end{aligned}$$



## §9. 样本强度

43. 记号 设  $Y \in \mathbf{N}^r$ , 令

$$\mu^Y = \sum_{a \in \mathbf{R}^m, Y T_a \mu \in Y} \mu(a) \delta_a, \quad \mu \in \mathbf{N},$$

则对任意的  $A \in \mathcal{M}^m$  有

$$\mu^Y(A) = \int 1_A(a) 1_Y(T_a \mu) \mu(da).$$

由简单的计算可知: 对任意的  $a \in \mathbf{R}^m$ ,

$$(T_a \mu)^Y = T_a(\mu^Y).$$

容易证明映像  $\mu \mapsto \mu^Y$  是可测的。因而对于  $(N, \mathbf{N})$  上的任意测度  $H$ , 通过上述映像可在  $(N, \mathbf{N})$  上诱导出另一测度, 记为  $H^Y$ 。如果  $H$  是平稳的, 则对任意的  $Z \in \mathbf{N}$ , 任意的  $a \in \mathbf{R}^m$ ,

$$\begin{aligned} H^Y(T_a \mu \in Z) &= H(\mu, T_a(\mu^Y) \in Z) \\ &= H(\mu, (T_a \mu)^Y \in Z) = H T_a^{-1}(\mu, \mu^Y \in Z) = H(\mu, \mu^Y \in Z) = H^Y(Z), \end{aligned}$$

所以  $H^Y$  也是平稳的。

如果  $P \in \mathcal{P}_N$  是平稳分布, 则样本强度  $S(\mu)$  对于  $P^Y$  几乎处处存在, 因而  $S(\mu^Y)$  相对于  $P$  几乎处处存在。应用推论 25, 令

$$f(a, \mu) = 1_{\{0,1\}^m}(a) 1_Y(\mu)$$

得

$$\begin{aligned} i_{P^Y} &= \iint 1_{\{0,1\}^m}(a) \mu(da) P^Y(d\mu) \\ &= \iint 1_{\{0,1\}^m}(a) 1_Y(T_a \mu) \mu(da) P(d\mu) \\ &= \iint 1_{\{0,1\}^m}(a) 1_Y(\mu) L \times P^0(da \times d\mu) = P^0(Y), \end{aligned}$$

因此得

$$\int S(\mu^Y) P(d\mu) = \int S(\mu) P^Y(d\mu) = i_{P^Y} = P^0(Y),$$

因而相对于  $P$  几乎处处有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (2n)^{-m} \mu^Y(\mathbb{C} - n, n)^m) = S(\mu^Y).$$

如果  $P$  是平稳分布且  $P(0) = 0$ , 则  $S(\mu) > 0, (u, e, P)$  (见引理 16), 而当  $i_P < \infty$  时,  $P(S(\mu) < \infty) = 1$ 。在这些条件之下, 有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\mu^Y(\mathbb{C} - n, n)^m)}{\mu(\mathbb{C} - n, n)^m)} = \frac{S(\mu^Y)}{S(\mu)}.$$

44. 定理 设  $P$  是遍历的平稳分布,  $0 < i_P < \infty$ , 又设  $Y \in \mathbf{N}$ , 则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\mu^Y(\mathbb{C} - n, n)^m)}{\mu(\mathbb{C} - n, n)^m)} = P_0(Y).$$

证明 由于  $\{0\} \in \bar{\mathbb{N}}$ , 所以  $P(0) = 0$  或  $1$ . 但由  $0 < i_P < \infty$  的假设可推知  $P(0) \neq 1$ , 故  $P(0) = 0$ . 从而由引理 16

$$P(\mu; 0 < S(\mu) < +\infty) = 1.$$

因为  $S(\mu^r)$  是  $\bar{\mathbb{N}}$  可测的, 且由于  $P$  是遍历的, 故知

$$S(\mu^r) = \int S(\mu^r) P(d\mu) = P^0(Y), \quad (a_s e_s P),$$

仍由  $P$  的遍历性可知

$$S(\mu) = i_P, \quad (a_s e_s P),$$

所以

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\mu^r(\zeta - n, n)^m}{\mu(\zeta - n, n)^m} = \frac{P^0(Y)}{i_P} = P_0(Y), \quad (a_s e_s P).$$

定理 44 要求  $P$  是平稳且遍历的. 当  $P$  只是平稳分布而非遍历时, 结论如何? 下面讨论这个问题.

我们仍设  $P(0) = 0$ ,  $0 < i_P < \infty$ . 因为在这些条件之下有

$$P(\mu; 0 < S(\mu) < \infty) = 1.$$

我们令

$$P_0(Y) = \int \frac{S(\mu^1)}{S(\mu)} P(d\mu), \quad Y \in \mathbb{N}^0,$$

并称  $P_0$  为拟 Palm 分布.

45. 定理 设  $P$  是平稳分布,  $0 < i_P < \infty$ ,  $P(0) = 0$ . 则  $P_0$  是  $\mathbb{N}^0$  上的分布并且

$$P_0(Y) = \int_Y \frac{S(\mu)}{i_P} P_0(d\mu), \quad Y \in \mathbb{N}^0.$$

或者

$$P^0(Y) = \int_Y S(\mu) P_0(d\mu), \quad Y \in \mathbb{N}^0.$$

证明 1. 首先设  $Y_n, n = 1, 2, \dots$ , 是  $\mathbb{N}^0$  中互不相交的集列,  $Y = \bigcup_n Y_n$ . 由于  $S(\mu^r) \leq S(\mu)$  故由

$$\begin{aligned} \int S(\mu^r) P(d\mu) &= P^0(Y) = \sum_{n=1}^{\infty} P^0(Y_n) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \int S(\mu^{Y_n}) P(d\mu) = \int \sum_{n=1}^{\infty} S(\mu^{Y_n}) P(d\mu), \end{aligned}$$

可推知

$$S(\mu^r) = \sum_{n=1}^{\infty} S(\mu^{Y_n}), \quad (a_s e_s P).$$

于是

$$P_0(Y) = \int \frac{S(\mu^r)}{S(\mu)} P(d\mu) = \int \sum_{n=1}^{\infty} S(\mu^{Y_n}) / S(\mu) P(d\mu) = \sum_{n=1}^{\infty} P_0(Y_n),$$

这说明  $P_0$  具有可列可加性。又显然  $P_0(N^0) = 1$ , 故  $P_0$  是  $N^0$  上的分布。

2. 现设  $Y \in N^0$  任意。令

$$Y_n = Y \cap \{\mu: \mu \in N, n^{-1} \leq S(\mu) < n\}, \quad n = 1, 2, \dots$$

将区间  $\left[\frac{1}{n}, n\right]$  分成  $k$  份, 每份长  $\frac{1}{k} \left(n - \frac{1}{n}\right) = \varepsilon$ 。令

$$A_j = \left[\frac{1}{n} + (j-1)\varepsilon, \frac{1}{n} + j\varepsilon\right), \quad j = 1, 2, \dots, k,$$

又令

$$Z_j = \{\mu: S(\mu) \in A_j\}, \quad j = 1, 2, \dots, k,$$

则有

$$\begin{aligned} & \left| P^0(Y_n) - \int_{Y_n} S(\mu) P_0(d\mu) \right| \\ & \leq \sum_{j=1}^k \left| P^0(Y_n \cap Z_j) - \int_{Y_n \cap Z_j} S(\mu) P_0(d\mu) \right| \\ & \leq \sum_{j=1}^k \left| P^0(Y_n \cap Z_j) - \left( \frac{1}{n} + (j-1)\varepsilon \right) P_0(Y_n \cap Z_j) \right| + \sum_{j=1}^k \varepsilon P_0(Y_n \cap Z_j) \\ & \leq \sum_{j=1}^k \left| \int_{Z_j} S(\mu^{Y_n}) P(d\mu) - \int_{Z_j} \left( \frac{1}{n} + (j-1)\varepsilon \right) \frac{S(\mu^{Y_n})}{S(\mu)} P(d\mu) \right| + \varepsilon \\ & \leq \sum_{j=1}^k \int_{Z_j} S(\mu^{Y_n}) \left( 1 - \frac{1/n + (j-1)\varepsilon}{1/n + j\varepsilon} \right) P(d\mu) + \varepsilon \\ & \leq n \max_{1 \leq j \leq k} \left( 1 - \frac{1/n + (j-1)\varepsilon}{1/n + j\varepsilon} \right) + \varepsilon \leq n^2 \varepsilon + \varepsilon = (n^2 + 1) \varepsilon = \frac{1}{k} \frac{n^4 - 1}{n}. \end{aligned}$$

对任一固定的  $n$ , 令  $k \rightarrow +\infty$  可得

$$P^0(Y_n) = \int_{Y_n} S(\mu) P_0(d\mu),$$

注意到  $Y_n \uparrow Y$ , 令  $n \rightarrow \infty$  便得

$$P^0(Y) = \int_Y S(\mu) P_0(d\mu).$$

46. 定理 设  $P$  是平稳分布,  $P(0) = 0$ ,  $0 < i_r < \infty$ , 则对任意的  $Y \in N$ , 有

$$P(Y) = \lim_{n \rightarrow \infty} (2n)^{-n} \int_{-n}^n \dots \int_{-n}^n P_0(T_a \mu \in Y) L(da).$$

证明 1. 首先设  $Y \in N$ . 由于从  $\mu(a) > 0$  可推出  $(T_a(\mu)(0, \dots, 0) > 0$ . 于是当  $\mu \in Y$  时有

$$\mu^{T_a \mu} = \sum_{0 \leq k \leq i_r} \mu(a) \delta_a = \mu.$$

而当  $\mu \notin Y$  时,  $T_a \mu \notin Y$ , 故

$$S(\mu^{T_a \mu}) = 1_Y(\mu) S(\mu), \quad (a, e, P),$$

由  $0 < S(\mu) < \infty (a, e, P)$  故

$$\frac{S(\mu^{\text{TON}})}{S(\mu)} = 1_T(\mu), \quad (a, e, P),$$

因此由  $P_\theta$  的定义知

$$P_\theta(Y) = \int \frac{S(\mu^{\text{TON}})}{S(\mu)} \cdot P(d\mu) = \int 1_T(\mu) P(d\mu) = P(Y),$$

因此对于任意的  $\bar{N}$  可测的非负函数  $f$  都有

$$\int f(\mu) P_\theta(d\mu) = \int f(\mu) P(d\mu).$$

2. 现设  $Y \in \bar{N}$  任意。由于

$$\begin{aligned} & (2\pi)^{-m} \int_{-\pi}^{\pi} \cdots \int_{-\pi}^{\pi} P_\theta(T_\theta \mu e Y) L(da) \\ &= (2\pi)^{-m} \int_{-\pi}^{\pi} \cdots \int_{-\pi}^{\pi} \left( \int 1_T(T_\theta \mu) P_\theta(d\mu) \right) L(da) \\ &= \int \{ (2\pi)^{-m} \int_{-\pi}^{\pi} \cdots \int_{-\pi}^{\pi} 1_T(T_\theta \mu) L(da) \} P_\theta(d\mu), \end{aligned}$$

因为  $1_T(\mu)$  是不变的, 故

$$\begin{aligned} & \lim_{m \rightarrow \infty} (2\pi)^{-m} \int_{-\pi}^{\pi} \cdots \int_{-\pi}^{\pi} P_\theta(T_\theta \mu e Y) (L da) \\ &= \int 1_T^*(\mu) P_\theta(d\mu) = \int 1_T(\mu) P(d\mu) = P(Y). \end{aligned}$$

## §10. 一维情形: Palm-Khinchin 理论

47. 考虑  $m=1$  的特殊情况, 这时  $X = (-\infty, +\infty)$ 。对于每一个  $\mu \in \bar{N}$ , 相应的简单计数测度  $\mu^*$  对应于下面的有序点列,

$$\begin{aligned} & (\dots, t_{-2}(\mu^*), t_{-1}(\mu^*), t_0(\mu^*), t_1(\mu^*), \dots), \\ & \dots < t_{-2}(\mu^*) < t_{-1}(\mu^*) \leq 0 < t_0(\mu^*) < t_1(\mu^*) < \dots, \end{aligned}$$

于是集合

$$\{a: a \in \mathbb{R}, \mu^*(S_{|a|}(a)) = 0\}, \quad \mu \in \bar{N}^0$$

与区间

$$[t_{-2}(\mu^*)/2, t_0(\mu^*)/2]$$

是重合的。此外, 当  $\mu^*((-\infty, 0)) = 0$  时约定  $t_{-2}(\mu^*) = -\infty$ ; 而当  $\mu^*((0, \infty)) = 0$  时约定  $t_0(\mu^*) = \infty$ 。

由定理 30 知, 当  $H$  是  $\bar{N}$  上的平稳测度, 而  $H((\cdot) \setminus \{0\}) \sigma$  有限时, 对任意的  $Y \in \bar{N}$  有

$$H(Y \setminus \{0\}) = \int \frac{1}{\mu(0)} \int_{t_{-2}(\mu^*)/2}^{t_0(\mu^*)/2} 1_T(T_\theta \mu) L(da) H^0(d\mu).$$

48. 引理 设  $H$  是  $\bar{N}$  上的平稳测度, 则当  $H((\cdot) \setminus \{0\}) \sigma$  有限时, 对任意  $Y \in \bar{N}$  有

$$H(\mu: \mu \in Y, \mu((-\infty, 0]) > 0) = \int \frac{1}{\mu(0)} \int_0^{t_0(\mu^0)} 1_T(T_t \mu) L(dt) H^0(d\mu)$$

证明 令  $Z = \{\mu: \mu((-\infty, 0]) > 0\}$  及

$$h(a, \mu) = \begin{cases} \frac{1}{\mu(a)}, & \text{当 } a = t_{-1}(\mu^0), \\ 0, & \text{其余.} \end{cases}$$

则

$$\sum_{a \in Z, \mu(a) > 0} h(a, \mu) \mu(a) = 1, \quad \mu \in Z,$$

于是由引理28得

$$\begin{aligned} H(Y \cap Z) &= \iint_{(-\infty, 0] \times \mathbb{R}^0} h(a, T_{-a} \mu) 1_T(T_{-a} \mu) L \times H^0(da \times d\mu) \\ &= \iint_{-\infty}^0 h(a, T_{-a} \mu) 1_T(T_{-a} \mu) L(da) H^0(d\mu), \end{aligned}$$

但由  $h$  的定义知

$$h(a, T_{-a} \mu) = \begin{cases} (T_{-a} \mu(a))^{-1}, & \text{当 } a = t_{-1}(T_{-a} \mu^0), \\ 0, & \text{其余.} \end{cases}$$

或者

$$h(a, T_{-a} \mu) = \begin{cases} \frac{1}{\mu(0)}, & \text{当 } -t_0(\mu^0) < a \leq 0, \\ 0, & \text{其余,} \end{cases}$$

于是得

$$H(Y \cap Z) = \int \frac{1}{\mu(0)} \int_0^{t_0(\mu^0)} 1_T(T_a \mu) L(da) H^0(d\mu).$$

引理获证。

49. 引理 设  $H$  是平稳测度, 且  $H((\cdot) \setminus \{0\})$  是  $\sigma$  有限的, 则

$$H(\mu: \mu(-t, 0]) > 0) = \int \frac{1}{\mu(0)} \min(t, t_0(\mu^0)) H^0(d\mu).$$

证明 在引理48中令

$$Y = \{\mu: \mu((-t, 0]) > 0\},$$

则

$$\begin{aligned} H(\mu: \mu((-t, 0]) > 0) &= \int \frac{1}{\mu(0)} \int_0^{t_0(\mu^0)} 1_T(T_a \mu) L(da) H^0(d\mu) \\ &= \int \frac{1}{\mu(0)} \min(t, t_0(\mu^0)) H^0(d\mu). \end{aligned}$$

下面的定理中所述的公式称为 Palm-Khinchin 公式。

50. 定理 设  $H$  是简单的平稳测度,  $H((\cdot) \setminus \{0\})$  是  $\sigma$  有限的。则对一切  $t \geq 0$  及一切非负整数  $j$  有

$$H(\mu: \mu((0, t]) > j) = \int_0^t H^0(\mu: \mu((0, a] = j) L(da).$$

**证明** 设  $t > 0, j \geq 0$ , 令

$$Z = \{(\alpha, \mu): 0 < \alpha \leq t, \mu((\alpha, t]) = j\},$$

$$Y = \{\mu: \mu \in N, \mu((0, t]) > j\},$$

$$h(\alpha, \mu) = 1_Z(\alpha, \mu),$$

则

$$\int h(\alpha, \mu) \mu(d\alpha) = 1, \quad \mu \in Y,$$

由于  $H$  是简单的, 知  $H(\mu: \mu((0, t]) > j) = H(Y)$ , 再由第四章之引理 2 得,

$$\begin{aligned} H(Y) &= \int h(\alpha, \mu) 1_T(\mu) \mathcal{G}_N(da \times d\mu) = \int h(\alpha, \mu) \mathcal{G}_N(da \times d\mu) \\ &= \int h(\alpha, T_{-\alpha}\mu) T \mathcal{G}_N(da \times d\mu) \\ &= \iint 1_{\{(\alpha, \mu): 0 < \alpha \leq t, \mu((\alpha, t-\alpha]) = j\}} (\alpha, \mu) L \times H^0(da \times d\mu), \\ &= \int_0^t H^0(\mu: \mu((0, t-\alpha]) = j) L(d\alpha). \end{aligned}$$

下面我们继续讨论简单平稳测度。本节余下的部分但设  $H$  是简单平稳测度, 满足  $0 < i_N < \infty$ .

令

$$F_N(a) = H_0(\mu: t_0(\mu) \leq a), \quad 0 \leq a < \infty.$$

**51. 引理** 设  $H$  是简单平稳测度,  $H((\cdot) \setminus \{0\})$  是  $\sigma$  有限的。则对任意  $Y \in N$  有

$$H(\mu: \mu \in Y, \mu((-\infty, 0]) > 0) = \int_0^\infty H^0(\mu: t_0(\mu) > a, T_a \mu \in Y) L(da).$$

**证明** 由引理 48, 得

$$\begin{aligned} H(\mu: \mu \in Y, \mu((-\infty, 0]) > 0) &= \iint_0^\infty 1_T(T_a \mu) L(da) H^0(d\mu) \\ &= \iint 1_{\{(\alpha, t_0(\mu))\}} (\alpha) 1_T(T_\alpha \mu) L(da) H^0(d\mu) \\ &= \int_0^\infty H^0(\mu: \alpha < t_0(\mu), T_\alpha \mu \in Y) L(d\alpha). \end{aligned}$$

**52. 定理** 设  $H$  是简单平稳测度,  $0 < i_N < \infty$ , 则对任意  $a, b \geq 0$  有

$$H(\mu: -t_{-1}(\mu) \leq a, t_0(\mu) \leq b) = i_N \left( \int_0^a + \int_0^b - \int_0^{a+b} \right) (1 - F_N(t)) dt$$

**证明** 令

$$Y = \{\mu: -t_{-1}(\mu) \leq a, t_0(\mu) \leq b\},$$

由引理 51 得

$$H(Y) = i_N \int_0^\infty H_0(\mu: t < t_0(\mu), T_t \mu \in Y) L(dt),$$

当  $t > a$  时,  $-t_{-1}(T_t \mu) > a$ , 而当  $t \leq a$  时,

$$\{\mu: t < t_0(\mu), T_t \mu \in Y\} = \{\mu: t < t_0(\mu) \leq t + b\},$$

所以

$$\begin{aligned} H(Y) &= i_H \int_0^a H_0(\mu: t < t_0(\mu) \leq t+b) L(dt) \\ &= i_H \int_0^a (F_H(b+t) - F_H(t)) L(dt) \\ &= i_H \left( \int_0^a + \int_a^b - \int_0^{a+b} \right) (1 - F_H(t)) L(dt). \end{aligned}$$

**53. 定理** 在定理52的假定之下, 有

$$H(\mu: t_0(\mu) \leq a) = i_H \int_0^a (1 - F_H(t)) L(dt),$$

以及

$$H(\mu: -t_{-1}(\mu) \leq a) = i_H \int_0^a (1 - F_H(t)) L(dt).$$

**证明** 令

$$Y = \{\mu: -t_{-1}(\mu) \leq a\}$$

则当  $t > a$  时,  $-t_{-1}(\mu) > a$ , 而当  $0 \leq t \leq a$  时,

$$\{\mu: t_0(\mu) > t, T_\mu \in Y\} = \{\mu: t_0(\mu) > t\}$$

从而由引理51得

$$\begin{aligned} H(Y) &= i_H \int_0^a H_0(\mu: t_0(\mu) > t, T_\mu \in Y) L(dt) \\ &= i_H \int_0^a H_0(\mu: t < t_0(\mu)) L(dt) = i_H \int_0^a (1 - F_H(t)) L(dt). \end{aligned}$$

此外, 由于  $H(\mu: t_0(\mu) \leq t) = H(\mu: \mu((0, t]) > 0)$ , 由平稳性推得

$$\begin{aligned} H(\mu: \mu((0, t]) > 0) &= H(\mu: \mu([0, t]) > 0) \\ &= H(\mu: \mu([-t, 0]) > 0) = H(\mu: -t_{-1}(\mu) \leq t). \end{aligned}$$

**54. 推论** 令

$$c = 1 - H_0(\mu: t_0(\mu) < \infty).$$

则对任意的  $a \geq 0$  有

$$H(\mu: -t_{-1}(\mu) \leq a, t_0(\mu) < \infty) = i_H \int_0^a (1 - F_H(t)) L(dt) - c \cdot i_H \cdot a,$$

和

$$H(\mu: -t_{-1}(\mu) \leq a, t_0(\mu) = \infty) = c \cdot i_H \cdot a.$$

**证明** 由定理52知

$$\begin{aligned} &H(\mu: -t_{-1}(\mu) \leq a, t_0(\mu) < \infty) \\ &= \lim_{b \rightarrow \infty} H(\mu: -t_{-1}(\mu) \leq a, t_0(\mu) \leq b) \\ &= i_H \int_0^a (1 - F_H(t)) L(dt) - \lim_{b \rightarrow \infty} i_H \int_b^{a+b} (1 - F_H(t)) L(dt) \\ &= i_H \int_0^a (1 - F_H(t)) L(dt) - c \cdot i_H \cdot a. \end{aligned}$$

**55. 推论** 在定理53的假定之下, 有

$$H(\mu: t_0(\mu) - t_{-1}(\mu) \leq b) = \int_0^b i_H t F_H(dt).$$

**证明** 由定理53得

$$\begin{aligned} H(\mu: a < -t_{-1}(\mu) \leq a + da, b < t_0(\mu) - t_{-1}(\mu) \leq b + db) \\ = 1_{\{0 < a \leq b\}} i_H(F_H(b + db) - F_H(b))L(da) \\ = 1_{\{0 < b \leq a\}} i_H(F_H(db))L(da), \end{aligned}$$

其中  $F_H(db) = F_H(b + db) - F_H(b) = H_0(\mu: b < t_0(\mu) \leq b + db)$ , 从而

$$\begin{aligned} H(\mu: t_0(\mu) - t_{-1}(\mu) \leq b) \\ = \int_0^b i_H F_H(dt) \int_0^\infty 1_{\{0 < t \leq t\}} L(dt) = \int_0^b i_H F_H(dt). \end{aligned}$$

## §11. 平稳无穷可分点过程

**56.** 仍然考虑  $X = R^m$  的情形。

仍以  $\mathcal{S}_{IN}$  记全体无穷可分分布。如果  $P \in \mathcal{S}_{IN}$ , 它的典测度是  $\bar{P} = \sum_{n=1}^{\infty} E_n$ ,  $E_n \in \mathcal{S}_+$ ,

$n = 1, 2, \dots$ 。对于任意  $t \in R^m, Y \in \mathbb{N}$  有

$$\begin{aligned} P(\mu: T_t \mu \in Y) &= \sum_{n=1}^{\infty} \mathcal{W}_{E_n}(\mu: T_t \mu \in Y) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \mathcal{W}_{E_n}(\mu: T_t \mu \in (\cdot))(Y) = \mathcal{W}_{\bar{P}}(\mu: T_t \mu \in (\cdot))(Y), \end{aligned}$$

即有

$$\overline{P(\mu: T_t \mu \in (\cdot))} = \bar{P}(\mu: T_t \mu \in (\cdot)),$$

所以  $P$  是平稳的当且仅当  $\bar{P}$  是平稳的。

如果  $P$  是平稳无穷可分分布, 则

$$i_P = i_{\bar{P}}.$$

**57. 引理** 设  $E \in \mathcal{S}_+$  且  $E$  是平稳的, 则

$$E(\mu: 0 < \mu(R^m) < \infty) = 0.$$

**证明** 对于正整数  $j$  有

$$\{\mu: \mu(R^m) = j\} \in \bar{\mathcal{N}},$$

又设  $S_n$  是以  $(0, \dots, 0)$  为中心, 以  $n$  为半径的开球。则对任意  $t \in R^m, 0 < i \leq j < \infty$  有

$$E(\mu: \mu(S_n + t) = i, \mu(R^m) = j) = E(\mu: \mu(S_n) = i, \mu(R^m) = j),$$

然而容易看出

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E(\mu: \mu(S_n + t) = i, \mu(R^m) = j) = 0,$$

所以对一切  $n$  有

$$E(\mu: \mu(S_n) = i, \mu(R^m) = j) = 0.$$

因此



$$E(\mu: \mu(R^m) = j) = \lim_{n \rightarrow \infty} E(\mu: \mu(S_n) = j, \mu(R^m) = j) = 0,$$

从而

$$E(\mu: 0 < \mu(R^m) < \infty) = 0.$$

88. 推论 设  $E \in \mathcal{E}_+$ , 平稳且  $E(0) = 0$ , 则  $\mathcal{E}_E$  是奇异无穷可分分布。

证明 由上面的引理知

$$(\tilde{\mathcal{E}}_E)(\mu: 0 < \mu(R^m) < \infty) = E(\mu: 0 < \mu(R^m) < \infty) = 0.$$

89. 在定义 1.64 中, 我们已将任意的无穷可分分布分解为,

$$P = P_r * P_s,$$

其中  $P_r$  是  $P$  的正则部分,  $P_s$  是  $P$  的奇异部分。

现在我们要对  $R^m$  上的平稳无穷可分分布作进一步的分解。首先注意, 由于

$$\{\mu: \mu(R^m) = \infty\} \in \bar{\mathcal{N}},$$

$$\{\mu: \mu(R^m) < \infty\} \in \bar{\mathcal{N}},$$

所以当  $P$  平稳时,

$$P_r(\cdot) = P(\mu: \mu(R^m) < \infty, \mu_e(\cdot)),$$

$$P_s(\cdot) = P(\mu: \mu(R^m) = \infty, \mu_e(\cdot)),$$

都是平稳的。

90. 定义 令

$$h(\cdot) = 1_{\{\mu: \mu((0,1)^m) > 0\}}(\cdot),$$

如果  $P \in \mathcal{P}_W$ , 则  $P \in \mathcal{E}_{h, \mu}$  于是

$$\int h(\mu) P(d\mu) = P(\mu: \mu((0,1)^m) > 0) < \infty,$$

又如果  $P$  是平稳的, 则  $h^*$  相对于  $P$  几乎处处存在。

现设  $P$  是平稳无穷可分分布, 如果

$$h^*(\mu) > 0, \quad (a.e. P),$$

则称  $P$  是强奇无穷可分的。

如果  $P$  是奇异的平稳无穷可分分布, 而且

$$Ph^*(\mu) = 0, \quad (a.e.)$$

则称  $P$  是弱奇无穷可分的。

下面的两个定理刻画了强奇无穷可分分布和弱奇无穷可分分布。

91. 定理 设  $P$  是平稳无穷可分分布, 则  $P$  是强奇无穷可分分布, 当且仅当存在至多可列个平稳的  $E_n \in \mathcal{E}_+$ ,  $E(0) = 0$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , 使得

$$P = \sum_{n=1}^{\infty} \mathcal{E}_{E_n}.$$

证明 必要性 假定  $h^*(\mu) > 0, (a.e. P)$ , 令

$$Y_1 = \{\mu: h^*(\mu) \geq 1\},$$

$$Y_n = \{\mu: \frac{1}{n} \leq h^*(\mu) < \frac{1}{n-1}\}, \quad n=2, 3, \dots$$

由  $h^*$  的不变性可知  $Y_n \in \bar{\mathcal{N}}$ ,  $n=1, 2, \dots$  又

$$\mathcal{P}(\cdot) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathcal{P}(\cdot \cap Y_n),$$

令  $E_n(\cdot) = \mathcal{P}(\cdot \cap Y_n)$ ,  $n=1, 2, \dots$ , 则显然每一  $E_n$  都是平稳的。并且

$$\frac{1}{n} E_n(N) \leq \int h^*(\mu) \mathcal{P}(d\mu) \leq \int h(\mu) \mathcal{P}(d\mu) < \infty,$$

$$E_n(0) = 0, \quad n=1, 2, \dots,$$

即

$$E_n \in \mathcal{S}, \quad n=1, 2, \dots$$

于是

$$\mathcal{P} = \sum_{n=1}^{\infty} \mathcal{P} = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \mathcal{P}_{E_n}.$$

充分性 如果

$$\mathcal{P} = \sum_{n=1}^{\infty} \mathcal{P}_n, \quad \mathcal{P}_n \text{ 平稳且 } \mathcal{P}_n \in \mathcal{S}, \quad n=1, 2, \dots,$$

■

$$\begin{aligned} & \mathcal{P}_n(\mu: \mu(\{0, 1\}^n) > 0, \quad h^*(\mu) = 0) \\ &= \int 1_{\{\mu: h^*(\mu) = 0\}} (\mu) h(\mu) \mathcal{P}_n(d\mu) = \int 1_{\{\mu: h^*(\mu) = 0\}} (\mu) h^*(\mu) \mathcal{P}_n(d\mu) = 0, \end{aligned}$$

于是由  $\mathcal{P}_n$  的平稳性及  $h^*$  的不变性推知

$$\mathcal{P}_n(\mu: \mu \neq 0, \quad h^*(\mu) = 0) = 0,$$

从而

$$\mathcal{P}_n(\mu: h^*(\mu) = 0) = 0, \quad n=1, 2, \dots,$$

于是

$$\mathcal{P}(\mu: h^*(\mu) = 0) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathcal{P}_n(\mu: h^*(\mu) = 0) = 0,$$

所以  $h^* > 0$ ,  $(a.e. \mathcal{P})$ .

02. 定理 设  $\mathcal{P}$  是平稳的奇异无穷可分分布, 则  $\mathcal{P}$  是弱奇异的, 当且仅当  $\mathcal{P}$  不可以表为如下形式:

$$\mathcal{P} = \mathcal{P}_1 * \mathcal{P}_2,$$

其中  $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2$  都是平稳无穷可分分布, 而  $\mathcal{P}_2$  满足条件:  $0 < \mathcal{P}_2(N) < \infty$ .

证明 设  $\mathcal{P}$  不是弱奇异的无穷可分分布, 则

$$\mathcal{P}(\mu: h^*(\mu) > 0) > 0,$$

从而存在常数  $c > 0$  使

$$\mathcal{P}(\mu: h^*(\mu) \geq c) > 0,$$

于是

$$P(\cdot) = P(\mu: \mu \in (\cdot), h^0(\mu) < c)^{\frac{1}{2}} P(\mu: \mu \in (\cdot), h^0(\mu) \geq c)$$

$$P = P_1 * P_2,$$

其中

$$P_1 = \mathcal{P} P(\mu: \mu \in (\cdot), h^0(\mu) < c),$$

$$P_2 = \mathcal{P} P(\mu: \mu \in (\cdot), h^0(\mu) \geq c),$$

$$0 < P_2(N) < +\infty, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} P_2(N) = 0.$$

反之, 如果存在分布  $P_1, P_2$ , 使  $P = P_1 * P_2$  而  $P_1, P_2$  平稳无穷可分且  $0 < P_2(N) < \infty$ , 则  $P_2$  是强奇异的平稳无穷可分分布。从而

$$P(\mu: h^0(\mu) > 0) \geq P_2(\mu: h^0(\mu) > 0) > 0,$$

于是知  $P$  不是弱奇异无穷可分分布。

63. 由前述, 可知, 对于任意的平稳奇异无穷可分分布  $P$ , 总可以表为:

$$P = P_{s,1} * P_{s,2},$$

其中  $P_{s,1}$  是弱奇异的, 而  $P_{s,2}$  是强奇异的, 并且

$$P_{s,1}(\cdot) = P(\mu: \mu \in (\cdot), \mu(R^m) = \infty, h^0(\mu) = 0),$$

$$P_{s,2}(\cdot) = P(\mu: \mu \in (\cdot), h^0(\mu) > 0).$$

所以, 任意的平稳无穷可分分布  $P$  都可以表为如下形式:

$$P = P_r * P_{s,1} * P_{s,2}.$$

## §12 平稳无穷可分点过程的遍历定理

64. 定理 设  $P$  是平稳无穷可分分布, 则下述诸命题等价:

1)  $P$  是遍历的;

2)  $P$  不可以表为形式:  $P = P_1 * P_2$ , 其中  $P_1$  与  $P_2$  都是平稳无穷可分分布, 而  $0 < P_2(N) < \infty$ .

3)  $P_{s,1} = \delta_0$ ;

4) 对任意的  $Y \in \mathbb{N}$ , 有  $P(Y) = 0$  或  $P(Y) = \infty$ ;

5) 对任意的  $A \in \mathcal{M}$ , 有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (2n)^{-n} \int_{-n}^n \dots \int_{-n}^n P(\mu: \mu(A) > 0, \mu(A-t) > 0) L(dt) = 0,$$

6) 对任意的  $Y_1 \in \mathbb{N}, Y_2 \in \mathbb{N}$  成立:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (2n)^{-n} \int_{-n}^n \dots \int_{-n}^n \left| P(Y_1 \cap T_t Y_2) - P(Y_1)P(Y_2) \right| L(dt) = 0,$$

7) 对任意  $Y_1, Y_2 \in \mathbb{N}$  有:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (2n)^{-n} \int_{-n}^n \dots \int_{-n}^n P(Y_1 \cap T_t Y_2) L(dt) = P(Y_1)P(Y_2).$$

证明 1)  $\Rightarrow$  2). 如果  $P = P_1 * P_2$ , 其中  $P_1$  与  $P_2$  都是平稳无穷可分分布, 而  $0 < P_2(N) < \infty$ , 则

$$P = P_1 * (e^{-\bar{P}_1(N)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} \bar{P}_1^k) \\ = e^{-\bar{P}_1(N)} P_1 + (1 - e^{-\bar{P}_1(N)}) P_1 * (\frac{e^{-\bar{P}_1(N)}}{1 - e^{-\bar{P}_1(N)}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} \bar{P}_1^k),$$

于是由定理10推知 $P$ 不是遍历的。

2)  $\Leftrightarrow$  3)。如果2)成立，则由定理62知 $P_1$ 是弱奇异的，故 $P_{11} = \delta_0$ ，反之，设2)不成立，则存在平稳无穷可分分布 $P_1, P_2$ 使

$$P = P_1 * P_2, \quad \bar{P} = \bar{P}_1 + \bar{P}_2,$$

而且 $P_2$ 满足条件 $0 < \bar{P}_2(N) < \infty$ 。于是，

$$\int h^*(\mu) \bar{P}(d\mu) \geq \int h^*(\mu) \bar{P}_2(d\mu) \\ = \int h(\mu) \bar{P}_2(d\mu) = \bar{P}_2(\mu: \mu((0, 1]^m) > 0) > 0,$$

从而

$$\bar{P}(\mu: h^*(\mu) > 0) > 0,$$

所以 $P_{11} \neq \delta_0$ ，于是2)与3)等价。

3)  $\Rightarrow$  4)。设 $Y \in \bar{N}$ 但 $0 < \bar{P}(Y) < \infty$ ，则由

$$\bar{P}(\cdot) = \bar{P}((\cdot) \cap Y) + \bar{P}((\cdot) \setminus Y)$$

可知 $P$ 可表为 $P_1 * P_2$ ，其中 $\bar{P}_1(\cdot) = \bar{P}((\cdot) \cap Y)$ 满足 $0 < \bar{P}_1(N) < \infty$ ，这说明2)不成立，从而 $P_{11} \neq \delta_0$ 。

4)  $\Rightarrow$  5)。首先，令

$$f(\mu) = 1_{\{\mu: \mu(A) > 0\}}(\mu),$$

则对任意的 $t \in \mathbb{R}^m$ 有

$$\int_{\{\mu: \mu(A) > 0\}} f(T_{-t}\mu) \bar{P}(d\mu) = \bar{P}(\mu: \mu(A) > 0, \mu(A-t) > 0),$$

如果对某个 $c > 0$ 有

$$\bar{P}(\mu: f^*(\mu) \geq c) > 0,$$

则由 $P$ 的不变性知 $Y = \{\mu: f^*(\mu) \geq c\} \in \bar{N}$ 并且

$$c \bar{P}(Y) \leq \int f^*(\mu) \bar{P}(d\mu) < \infty,$$

于是 $0 < \bar{P}(Y) < \infty$ 与4)矛盾。这说明当4)成立时，必有 $f^*(\mu) = 0$ ， $(a, c, \bar{P})$ 。

由于

$$(2\pi)^{-m} \int_{-\pi}^{\pi} \dots \int_{-\pi}^{\pi} f(T_{-t}\mu) L(dt) \leq 1,$$

应用控制收敛定理推知

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (2\pi)^{-m} \int_{-\pi}^{\pi} \dots \int_{-\pi}^{\pi} \bar{P}(\mu: \mu(A) > 0, \mu(A-t) > 0) L(dt)$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\{\mu; \mu(A) > 1\}} \{(2n)^{-n} \int_{-n}^n \dots \int_{-n}^n f(T_{-t} \mu) L(dt)\} P(d\mu) \\
&= \int_{\{\mu; \mu(A) > 1\}} f^*(\mu) P(d\mu) = 0.
\end{aligned}$$

5) \$\Rightarrow\$ 6). 首先设 \$A \in \mathcal{S}\$, \$Y\_1, Y\_2 \in \mathcal{N}\$. 则当 \$\|t\|\$ 充分大时 \$A \cap (A-t) = \emptyset\$. 因此存在 \$t\_0\$, 使当 \$\|t\| \geq \|t\_0\|\$ 时有

$$\begin{aligned}
P(Y_1 | P(Y_2)) &= P(Y_1) P(T_t Y_2) = P(\mu: A \mu \in Y_1) P(\mu: (A-t) \mu \in T_t Y_2) \\
&= {}_A P(\mu: \mu \in Y_1) ({}_{(A-t)} P)(\mu: \mu \in T_t Y_2) \\
&= ({}_A P \times {}_{(A-t)} P)((\mu_1, \mu_2): \mu_1 \in Y_1, \mu_2 \in T_t Y_2) \\
&= ({}_A P * {}_{(A-t)} P)(Y_1 \cap T_t Y_2),
\end{aligned}$$

应用不等式 \$\|x\_{Y\_1} - x\_{Y\_2}\| \leq 2\|E\_1 - E\_2\|\$ 得

$$\begin{aligned}
|P(Y_1 \cap T_t Y_2) - P(Y_1)P(Y_2)| &\leq \|{}_A P * {}_{(A-t)} P - {}_A P * {}_{(A-t)} P\| \\
&\leq 2\|{}_A P * {}_{(A-t)} P - {}_A P * {}_{(A-t)} P\| \leq 2\|P(\zeta_{AU(A-t)} \mu \in (\cdot), \mu(A) + \mu(A-t) > 0) \\
&\quad - P(A \mu \in (\cdot), \mu(A) > 0) - P((A-t) \mu \in (\cdot), \mu(A-t) > 0)\|, \quad (1)
\end{aligned}$$

由于 \$A\$ 与 \$A-t\$ 不交, 从而 \$A \cup (A-t) \mu = [A \cup (A-t)] \mu\$, 所以

$$\begin{aligned}
&P([A \cup (A-t)] \mu \in (\cdot), \mu(A) + \mu(A-t) > 0) \\
&= P([A \cup (A-t)] \mu \in (\cdot), \mu(A) > 0, \mu(A-t) = 0) \\
&\quad + P([A \cup (A-t)] \mu \in (\cdot), \mu(A) = 0, \mu(A-t) > 0) \\
&\quad + P([A \cup (A-t)] \mu \in (\cdot), \mu(A) > 0, \mu(A-t) > 0) \\
&= P(A \mu \in (\cdot), \mu(A) > 0, \mu(A-t) = 0) \\
&\quad + P((A-t) \mu \in (\cdot), \mu(A-t) > 0, \mu(A) = 0) \\
&\quad + P([A \cup (A-t)] \mu \in (\cdot), \mu(A) > 0, \mu(A-t) > 0),
\end{aligned}$$

又有

$$\begin{aligned}
P(A \mu \in (\cdot), \mu(A) > 0) &= P(A \mu \in (\cdot), \mu(A) > 0, \mu(A-t) = 0) \\
&\quad + P(A \mu \in (\cdot), \mu(A) > 0, \mu(A-t) > 0),
\end{aligned}$$

和

$$\begin{aligned}
&P((A-t) \mu \in (\cdot), \mu(A-t) > 0) \\
&= P((A-t) \mu \in (\cdot), \mu(A-t) > 0, \mu(A) = 0) \\
&\quad + P((A-t) \mu \in (\cdot), \mu(A-t) > 0, \mu(A) > 0).
\end{aligned}$$

将这些结果代入 (1) 得

$$|P(Y_1 \cap T_t Y_2) - P(Y_1)P(Y_2)| \leq 6P(\mu: \mu(A) > 0, \mu(A-t) > 0),$$

由此推知对任意的 \$Y\_1, Y\_2 \in \mathcal{N}\$, (6) 成立.

现取 \$A\_k \in \mathcal{S}^m\$, \$k=1, 2, \dots\$, \$A\_k \uparrow R^m\$. 则对一切 \$Y\_1, Y\_2 \in \bigcup\_{k=1}^{\infty} A\_k \mathcal{N}\$, (6) 仍成立.

现在固定 \$Y \in \mathcal{N}\$, 记一切使下式

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (2n)^{-n} \int_{-n}^n \dots \int_{-n}^n |P(Y \cap T_t Y') - P(Y)P(Y')| L(dt) = 0$$

成立的 \$Y'\$ 为 \$\Gamma\_Y\$.

如果 \$Y'\_k \in \Gamma\_Y\$, \$k=1, 2, \dots\$, \$Y'\_k \uparrow\$, 令 \$Y' = \bigcup\_{k=1}^{\infty} Y'\_k\$ 则

$$\begin{aligned}
& |P(Y \cap T_t Y') - P(Y)P(Y')| \\
& \leq |P(Y \cap T_t Y'_h) - P(Y)P(Y'_h)| \\
& \quad + |P(Y)P(Y'_h) - P(Y)P(Y')| + |P(Y \cap T_t Y') - P(Y \cap T_t Y'_h)| \\
& \leq |P(Y \cap T_t Y'_h) - P(Y)P(Y'_h)| + 2|P(Y \setminus Y'_h)|,
\end{aligned}$$

由此见到  $Y' \in \Gamma_r$ 。同理可知，当  $Y'_h \downarrow, Y'_h \in \Gamma_r$  时， $\cap Y'_h \in \Gamma_r$ ，这说明  $\Gamma_r$  是单调类。

又由于  $Y_h \in \Gamma_{r_1}$  等价于  $Y_h \in \Gamma_{r_2}$ 。事实上，

$$\begin{aligned}
& \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} |P(Y_1 \cap T_t Y_2) - P(Y_1)P(Y_2)| L(dt) \\
& = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} |P(T_{-t} Y_1 \cap Y_2) - P(Y_1)P(Y_2)| L(dt) \\
& = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} |P(Y_1 \cap T_t Y_2) - P(Y_1)P(Y_2)| L(dt),
\end{aligned}$$

这表明当  $Y \in \bigcup_k N_k$  时， $\Gamma_r \supset \bigcup_k N_k$ ，从而  $\Gamma_r = N$ ，即6)成立。

6)  $\Rightarrow$  7) 显然。

7)  $\Rightarrow$  1) 见定理10。

下面我们研究一类特殊的平稳分布。

**65. 定义** 设  $P$  是平稳分布，如果对于一切  $Y_1, Y_2 \in N$ ，下式

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(Y_1 \cap T_n Y_2) = P(Y_1)P(Y_2)$$

对  $R^m$  中任何满足  $\|t_n\| \rightarrow \infty$  的点列  $\{t_n\}$  都成立，则称  $P$  是混合的。

由定理64知任何混合的平稳分布都是遍历的。

**66. 定理** 在  $N$  上的平稳无穷可分分布  $P$  是混合的，当且仅当对任意的有界集  $A \in \mathcal{B}^m$ ，下式

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(\mu, \mu(A) > 0, \mu(A + t_n) > 0) = 0$$

对  $R^m$  中一切满足  $\|t_n\| \rightarrow \infty$  的  $\{t_n\}$  都成立。

**证明** 如果  $P$  是混合的，则

$$\begin{aligned}
& \lim_{n \rightarrow \infty} P(\mu, \mu(A) = 0, \mu(A + t_n) = 0) \\
& = \lim_{n \rightarrow \infty} P(\mu, \mu(A) = 0, T_{t_n} \mu(A) = 0) = (P(\mu, \mu(A) = 0))^2,
\end{aligned}$$

于是

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \exp\{-2P(\mu, \mu(A) > 0, \mu(A + t_n) > 0)\}$$

$$= \exp(-2P(\mu, \mu(A) > 0)).$$

但由平稳性得

$$\begin{aligned}
& \mathbb{P}(\mu_1 \mu(A) + \mu(A + t_n) > 0) \\
&= \mathbb{P}(\mu_1 \mu(A) > 0, \mu(A + t_n) = 0) \\
&+ \mathbb{P}(\mu_1 \mu(A) > 0, \mu(A + t_n) > 0) + \mathbb{P}(\mu_1 \mu(A) = 0, \mu(A + t_n) > 0) \\
&= \mathbb{P}(\mu_1 \mu(A) > 0) + \mathbb{P}(\mu_1 \mu(A + t_n) > 0) - \mathbb{P}(\mu_1 \mu(A) > 0, \mu(A + t_n) > 0) \\
&= 2\mathbb{P}(\mu_1 \mu(A) > 0) - \mathbb{P}(\mu_1 \mu(A) > 0, \mu(A + t_n) > 0),
\end{aligned}$$

所以得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(\mu_1 \mu(A) > 0, \mu(A + t_n) > 0) = 0.$$

反之, 如果上式成立, 则仿定理64中 5)  $\Rightarrow$  6) 的证明可证: 对任意  $Y_1, Y_2 \in \mathcal{N}$  有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |P(Y_1 \cap T_{t_n} Y_2) - P(Y_1)P(Y_2)| = 0, \quad \text{且 } \mathcal{N} \neq \emptyset$$

即  $P$  是混合的。

**67. 定理** 一切正则平稳无穷可分分布都是混合的。

**证明** 设  $A$  是  $R^m$  中的有界 Borel 集。由于  $P$  是正则平稳无穷可分分布, 所以

$$\begin{aligned}
0 &= \mathbb{P}(\mu_1 \mu(A) > 0, \mu(R^m) = \infty) \\
&= \lim_{j \rightarrow \infty} \mathbb{P}(\mu_1 \mu(A) > 0, \mu(R^m \setminus S_j) > 0),
\end{aligned}$$

其中  $S_j, j = 1, 2, \dots$ , 是以  $(0, \dots, 0)$  为中心以正整数  $j$  为半径的开球。

当  $j$  固定时, 如果  $\|t_n\| \rightarrow \infty$ , 则有

$$\begin{aligned}
& \limsup_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(\mu_1 \mu(A) > 0, \mu(A + t_n) > 0) \\
&\leq \mathbb{P}(\mu_1 \mu(A) > 0, \mu(R^m \setminus S_j) > 0),
\end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}
& \limsup_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(\mu_1 \mu(A) > 0, \mu(A + t_n) > 0) \\
&\leq \lim_{j \rightarrow \infty} \mathbb{P}(\mu_1 \mu(A) > 0, \mu(R^m \setminus S_j) > 0) \\
&= \mathbb{P}(\mu_1 \mu(A) > 0, \mu(R^m) = \infty) = 0.
\end{aligned}$$

### §13. 平稳无穷可分点过程的样本强度

**68. 定理** 设  $E \in \mathcal{B}_+$  且是平稳的,  $E(\mu_1 S(\mu) = +\infty) = 0$ , 则  $\mathbb{P}_E(\mu_1 S(\mu) < \infty) = 1$ , 并且

$$\sigma_{\mathbb{P}_E} = \sigma_{\sigma_E}$$

其中  $\mathbb{P}_E$  是  $(0, \infty)$  上的分布,

$$\mathbb{P}_{\sigma_E} = \exp(-\sigma_E((0, \infty))) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} (\sigma_E)^k.$$

**证明** 因为

$$E^m(\mu_1 S(\mu) < \infty) = (E(\mu_1 S(\mu) < \infty))^m = (E(N))^m,$$

所以

$$\mathcal{H}_E(\mu; S(\mu) < \infty) = 1;$$

又因为

$$\sigma_{i_1 i_2} = (\sigma_i)^n, \quad \sigma_{i_1 + i_2} = \sigma_{i_1} + \sigma_{i_2},$$

所以

$$\sigma(\mathcal{H}_E) = \sigma\left(e^{-\mathcal{H}(H)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} \sigma_k\right) = e^{-\mathcal{H}(H)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} (\sigma_k)^k = \mathcal{H}(\sigma_E).$$

**69. 定理** 设  $P$  是平稳无穷可分分布, 满足  $i_P < \infty$ . 则  $P$  是遍历的, 当且仅当

$$S(\mu) = i_P, \quad (a, e, P).$$

**证明** 如果  $P$  是遍历的, 则由定理 6 及定理 10 知

$$S(\mu) = i_P, \quad (a, e, P).$$

反之, 如果  $P$  不是遍历的, 则由定理 64 知  $P$  可表为如下形式

$$P = \mathcal{H}_E * Q,$$

其中  $E, Q$  都是平稳的, 而  $E$  满足

$$E \in \mathcal{E}_+, \quad E(0) = 0, \quad \mathcal{H}_E \neq \delta_0.$$

于是得

$$\sigma_P = \sigma_Q * \sigma_{\mathcal{H}_E} = a\sigma_0 + (1-a)\gamma,$$

其中

$$0 < a = \exp(-\sigma_E([0, \infty))) < 1,$$

和

$$\gamma = \frac{a}{1-a} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} (\sigma_E)^k * \delta_0.$$

现在如设  $\sigma_P(\cdot) = \delta_{i_P}(\cdot)$ , 则

$$a\sigma_0 + (1-a)\gamma = \delta_{i_P}.$$

因为  $\delta_{i_P}$  的测度集中于点  $i_P$ , 所以只能有

$$\sigma_0 = \delta_{i_P}, \quad \text{即 } i_Q = i_P,$$

但又因为  $i_P = i_Q + i_{\mathcal{H}_E}$ , 所以  $i_{\mathcal{H}_E} = 0$  从而  $\mathcal{H}_E = \delta_0$  这便导出矛盾. 所以  $S(\mu) = i_P(a, e, P)$

必然推出  $P$  的遍历性.

**70. 定理** 设  $P$  是平稳无穷可分分布, 满足  $i_P < \infty$ . 则  $\sigma_P$  可作如下的分解:

$$\sigma_P = \delta_{(i_{P_1} + i_{P_{E,1}})} * \mathcal{H}_{P_1}$$

其中

$$E(\cdot) = P(\mu; S(\mu) \in (\cdot) \setminus \{0\}).$$



**证明** 当  $i_p < \infty$  时, 有  $i_p = i_p$ . 由定理 69 知

$$\sigma_p = \sigma_{(F_p, F_{p+1})} \otimes \sigma_{F_{p+2}} \otimes \sigma_{(F_p, F_{p+1})} \otimes \sigma_{F_{p+2}},$$

下面证明  $\sigma_{F_{p+1}} = \mathcal{W}_E$ , 而  $E(\cdot) = \mathbb{P}(\mu: S(\mu) \in (\cdot) \setminus \{0\})$ .

设

$$P_{1,2} = \sum_{n=1}^{\infty} \mathcal{W}_{E_n},$$

其中  $E_n \in \mathcal{E}$ ,  $E_n(0) = 0$ , 且  $E_n$  为平稳的,  $n = 1, 2, \dots$ .

如果  $\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n \in N$  且  $S(\mu)$  存在, 则

$$S(\mu) = S\left(\sum_{n=1}^{\infty} \mu_n\right) \geq \sum_{n=1}^{\infty} S(\mu_n),$$

所以

$$S\left(\sum_{n=1}^{\infty} \mu_n\right) \geq \sum_{n=1}^{\infty} S(\mu_n),$$

从而

$$\begin{aligned} i_{F_{p+1}} &= \int S(\mu) P_{1,2}(d\mu) \\ &= \int S\left(\sum_{n=1}^{\infty} \mu_n\right) \left(\sum_{n=1}^{\infty} \mathcal{W}_{E_n}(d\mu_n)\right) \geq \int \sum_{n=1}^{\infty} S(\mu_n) \left(\sum_{n=1}^{\infty} \mathcal{W}_{E_n}(d\mu_n)\right) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \int S(\mu_n) \mathcal{W}_{E_n}(d\mu_n) = \sum_{n=1}^{\infty} i_{E_n} = i_{F_{p+1}}, \end{aligned}$$

所以

$$\sum_{n=1}^{\infty} S(\mu_n) = S\left(\sum_{n=1}^{\infty} \mu_n\right), \quad (a, c, P_{1,2}),$$

从而

$$\sigma_{F_{p+1}} = \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_{E_n} = \sum_{n=1}^{\infty} \mathcal{W}_{E_n} = \mathcal{W}_E,$$

其中

$$\begin{aligned} E(\cdot) &= \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_{E_n}((\cdot) \setminus \{0\}) = \sum_{n=1}^{\infty} E_n(\mu: S(\mu) \in (\cdot) \setminus \{0\}) \\ &= \mathbb{P}_{1,2}(\mu: S(\mu) \in ((\cdot) \setminus \{0\})) = \mathbb{P}(\mu: S(\mu) \in ((\cdot) \setminus \{0\})). \end{aligned}$$

## §14. 平稳无穷可分分布的 Palm 测度

71. 设  $P$  是平稳无穷可分分布, 则  $\bar{P}$  是平稳的, 而且

$$\bar{P} = \bar{P}_\tau + \bar{P}_{\tau+1} + \bar{P}_{\tau+2}.$$

下面分别以  $P^0, (\bar{P})^0, (P_\tau)^0, (\bar{P}_{\tau+1})^0, \dots$ , 记  $P, \bar{P}, P_\tau, \bar{P}_{\tau+1}, \dots$  的 Palm 测度, 而以  $P_0, (\bar{P})_0, (P_\tau)_0, (\bar{P}_{\tau+1})_0, \dots$ , 记相应的 Palm 分布.

仍令

$$h(\mu) = 1_{\{\mu; \mu([0,1]^m) > 0\}}(\mu).$$

则下列事实是明显的:

$$(\bar{P}_\tau)^0 = (\bar{P})^0(\mu; \mu \in (\cdot), \mu(R^m) < \infty),$$

$$(\bar{P}_{\tau+1})^0 = (\bar{P})^0(\mu; \mu \in (\cdot), \mu(R^m) = \infty, h^0(\mu) = 0),$$

$$(\bar{P}_{\tau+2})^0 = (\bar{P})^0(\mu; \mu \in (\cdot), \mu(R^m) = \infty, h^0(\mu) > 0),$$

$$P \text{ 是 Poisson 分布当且仅当 } (\bar{P})^0(\mu; \mu(R^m) \neq 1) = 0,$$

$$P \text{ 是 } G\text{-}P \text{ 分布当且仅当 } (\bar{P})^0(\mu; \mu(R^m) > 2) = 0,$$

$$P \text{ 是正则无穷可分分布当且仅当 } (\bar{P})^0(\mu; \mu(R^m) = \infty) = 0,$$

$$P \text{ 是奇异无穷可分分布当且仅当 } (\bar{P})^0(\mu; \mu(R^m) < \infty) = 0,$$

$$P \text{ 是遍历的无穷可分分布当且仅当 } (\bar{P})^0(\mu; h^0(\mu) > 0) = 0.$$

72. 引理 设  $V$  是  $R^m \times N$  上的  $\sigma$  有限测度,  $H$  是  $N$  上的  $\sigma$  有限平稳测度, 则

$$T(V \otimes H) = (TV) \otimes H.$$

证明 通过映象

$$((a, \mu_1), \mu_2) \mapsto ((a, \mu_1 + \mu_2), \mu_2)$$

将  $V \times H$  变为  $V \otimes H$ , 再通过映象

$$(a, \mu) \mapsto (a, T_a \mu)$$

就变为  $T(V \otimes H)$ .

另一方面, 由平稳性, 映象

$$((a, \mu_1), \mu_2) \mapsto ((a, \mu_1), T_a \mu_2)$$

将  $V \times H$  变为它自己, 而映象

$$((a, \mu_1), \mu_2) \mapsto ((a, T_a \mu_1), \mu_2)$$

变  $V \times H$  为  $(TV \times H)$ , 而

$$((a, \mu_1), \mu_2) \mapsto (a, \mu_1 + \mu_2)$$

变  $TV \times H$  为  $TV \otimes H$ .

由于这个引理及引理 V.8, 当  $H_1, H_2$  都是  $\sigma$  有限测度时, 有

$$\mathcal{G}_{H_1 * H_2} = \mathcal{G}_{H_1} \otimes H_2 + \mathcal{G}_{H_2} \otimes H_1,$$

从而

$$T\mathcal{G}_{H_1 * H_2} = (T\mathcal{G}_{H_1}) \otimes H_2 + (\mathcal{G}_{H_2}) \otimes H_1.$$

73. 推论 设  $H_1, H_2$  都是  $N$  上的  $\sigma$  有限测度, 且同为平稳的. 则

$$(H_1 * H_2)^0 = H_1^0 * H_2 + H_1^0 * H_2^0.$$

**证明** 由上面所得的等式及定理24得

$$\begin{aligned} L \times (H_1 * H_2^0) &= (L \times H_1^0) \otimes H_2 + (L \times H_2^0) \otimes H_1 \\ &= L \times (H_1^0 * H_2 + H_2^0 * H_1). \end{aligned}$$

下述定理刻画平稳无穷可分分布的 Palm 测度。

**74. 定理** 设  $P$  是平稳分布，它是无穷可分的，当且仅当存在  $N$  上的  $\sigma$  有限测度  $Q$ ，使

$$P^0 = Q * P,$$

其中

$$Q = (P)^0.$$

**证明** 设  $P$  是平稳无穷可分分布，则由定理 V.9 知

$$L \times P^0 = T\mathcal{G}_P = T(\mathcal{G}_P \otimes P) = (T\mathcal{G}_P) \otimes Q = L \times ((P)^0 * P),$$

从而

$$P^0 = (P)^0 * P.$$

反之，设  $P^0 = Q * P$ ，则

$$Q(\mu: \mu(0, \dots, 0) = 0) = P^0(\mu: \mu(0, \dots, 0) = 0) = 0,$$

从而  $Q(N \setminus N^0) = 0$ 。

现在

$$T\mathcal{G}_P = L \times P^0 = L \times (Q * P) = (L \times Q) \otimes P = TV \otimes P,$$

其中  $TV = L \times Q$ ，由引理 72 知

$$T\mathcal{G}_P = T(V \otimes Q),$$

所以  $\mathcal{G}_P = V \otimes Q$ 。于是由定理 V.10 知  $P$  是无穷可分的，并且  $V = \mathcal{G}_P$  即

$$L \times Q = T\mathcal{G}_P = L \times (P)^0.$$

**75. 推论** 设  $P$  是平稳分布， $0 < i_r < \infty$ ，则它是无穷可分的，当且仅当存在平稳分布  $H$  使

$$P_0 = H * P,$$

其中

$$H = (P)_1.$$

这个推论由前述定理及 Palm 分布的定义即得到。

## §15. 平稳混合型 Poisson 过程

**76.** 设  $P$  是平稳分布，而且是混合型 Poisson 分布，即存在  $\lambda \in M$  以及  $(0, \infty)$  上的分布  $\sigma$  使

$$P(\cdot) = \int P_{\lambda A}(\cdot) \sigma(d\lambda).$$

这时，对于任意的  $\lambda \in \mathcal{M}$  有

$$I_r(A) = \int I_{r, \lambda A}(A) \sigma(d\lambda) = \lambda(A) \int \lambda \sigma(d\lambda),$$

当  $\int \lambda \sigma(dl) < \infty$  时, 推知  $\lambda(A) = c \cdot L(A)$ . 其实这个结论对于  $\int \lambda \sigma(dl) = \infty$  时亦成立.

**77. 引理** 设  $P$  是平稳混合型Poisson分布, 则  $P$  可表为如下形式,

$$P(\cdot) = \int P_{ll}(\cdot) \sigma(dl),$$

其中  $\sigma$  是  $[0, \infty)$  上的分布.

**证明** 因为  $P$  是混合型Poisson分布, 所以存在  $[0, \infty)$  上的分布  $\sigma'$  及  $\lambda$  使得

$$P(\cdot) = \int P_{ll}(\cdot) \sigma'(dl).$$

又因为  $P$  是平稳的, 所以

$$P(\mu: \mu(A) = 0) = P(\mu: \mu(A+t) = 0)$$

对任意  $t \in R^m$  都成立, 即

$$\int e^{-i\lambda(A)} \sigma'(dl) = \int e^{-i\lambda(A+t)} \sigma'(dl);$$

如果  $\lambda = 0$  或者  $\sigma' = \delta_0$  则

$$P(\cdot) = \int P_{ll}(\cdot) \sigma'(dl) = \int P_{ll}(\cdot) \delta_0(dl),$$

如果  $\lambda \neq 0$  且  $\sigma'(l \neq 0) > 0$ , 则可推知

$$\lambda(A) = \lambda(A+t),$$

从而  $\lambda(\cdot) = cL(\cdot)$ , 而  $c > 0$  是某常数. 于是

$$P(\cdot) = \int P_{ll}(\cdot) \sigma'(dl) = \int P_{l, cL}(\cdot) \sigma'(dl) = \int P_{ll}(\cdot) \sigma(dl),$$

其中  $\sigma$  是  $\sigma'$  在映象  $l \mapsto cl$  之下的象.

**78. 引理** 设  $P$  是平稳的  $G_\lambda$  型分布, 则  $P$  是平稳的混合型Poisson分布, 即

$$P(\cdot) = \int P_{ll}(\cdot) \sigma(dl).$$

**证明** 由定理 V. 26 知道, 如果  $\lambda(R^m) = \infty$ , 则  $G_\lambda$  型分布就是混合型Poisson分布, 由前述引理知, 此时  $P = G_\lambda$  可表为所求的形式.

如果  $0 < \lambda(R^m) < \infty$ , 不失一般性可设  $\lambda(R^m) = 1$ . 这时由定理 V. 26 知  $P = G_\lambda$  有如下形式:

$$P = \sum_{h=0}^{\infty} P_{\lambda^m}(h) Q_\lambda^h.$$

由于  $P$  是平稳的, 故

$$P(\mu: \mu(A) = 0) = P(\mu: \mu(A+t) = 0);$$

对任意  $t \in R^m$  成立, 即

$$\sum_{h=0}^{\infty} P_{\lambda^m}(h) Q_\lambda^h(\mu: \mu(A) = 0) = \sum_{h=0}^{\infty} P_{\lambda^m}(h) Q_\lambda^h(\mu: \mu(A+t) = 0),$$

于是知

$$Q_\lambda(\mu: \mu(A) = 0) = Q_\lambda(\mu: \mu(A+t) = 0),$$

根据  $Q_\lambda$  的定义,

$$Q_A(\mu: \mu(A) = 0) = \lambda(R^m \setminus A),$$

所以

$$\lambda(R^m \setminus A) = \lambda(R^m \setminus (A + t))$$

即

$$\lambda(A) = \lambda(A + t), \quad \forall t \in R^m.$$

这与  $0 < \lambda(R^m) < \infty$  的假定矛盾。这说明平稳  $G_A$  型分布只能有  $\lambda(R^m) = 0$  或  $\lambda(R^m) = \infty$ , 因而一定可表为所要求的形式。

总结上述结果, 我们得到下面的定理。

**79. 定理** 设  $P \in \mathcal{P}_N$ , 则下列命题等价:

1) 存在  $(0, \infty)$  上的分布  $\sigma$  使

$$P(\cdot) = \int P_{lt}(\cdot) \sigma(dt),$$

2)  $P$  是平稳的混合型 Poisson 分布;

3)  $P$  是平稳的  $G_A$  型分布。

下面我们寻求平稳的混合型 Poisson 分布的 Palm 测度的一般形式。对于平稳的 Poisson 分布  $P_{lt}, l \geq 0$ , 由定理 74 知:

$$(P_{lt})^0 = (P_{lt})^* * P_{lt}.$$

又由定理 24 知, 对任意  $A \in \mathcal{S}^m, 0 < L(A) < \infty$  有

$$\begin{aligned} (P_{lt})^0(\cdot) &= (Q_{lt})^0(\cdot) = \frac{1}{L(A)} \iint 1_A(a) \delta_{T_{\sigma^0}}(\cdot) \mu(da) Q_{lt}(d\mu) \\ &= \frac{1}{L(A)} \iint 1_A(a) \delta_{\delta_{(t_0, \dots, t_0)}}(\cdot) \delta_1(da) l \cdot L(dt) = l \delta_{\delta_{(t_0, \dots, t_0)}}(\cdot), \end{aligned}$$

从而 Poisson 分布  $P_{lt}, l \geq 0$  的 Palm 测度是

$$(P_{lt})^0 = (l \delta_{\delta_{(t_0, \dots, t_0)}}) * P_{lt}.$$

**80. 定理**  $N$  上的分布  $P$  具有如下形式

$$P(\cdot) = \int P_{lt}(\cdot) \sigma(dt)$$

的充要条件为: 存在  $N$  上的  $\sigma$  有限测度  $H$ , 使

$$P^0 = (\delta_{\delta_{(t_0, \dots, t_0)}}) * H,$$

并且  $H(\cdot) = \int l P_{lt}(\cdot) \sigma(dt)$ .

**证明** 必要性 任意选取  $A \in \mathcal{S}^m$ , 使  $L(A) > 0$ , 由定理 24, 对任意的  $Y \in N^0$  有

$$\begin{aligned} P^0(Y) &= \frac{1}{L(A)} \iint 1_A(a) 1_Y(T_{\sigma^0}) \mu(da) P(d\mu) \\ &= \int \frac{1}{L(A)} \iint 1_A(a) 1_Y(T_{\sigma^0}) \mu(da) P_{lt}(d\mu) \sigma(dt) \\ &= \int (P_{lt})^0(Y) \sigma(dt) = (\delta_{\delta_{(t_0, \dots, t_0)}}) * H, \end{aligned}$$

其中  $H(\cdot) = \int l P_{lk}(\cdot) \sigma(dl)$ .

充分性 如果  $H$  是  $\sigma$  有限的, 并且

$$P_0 = (\delta_{\{0, \dots, 0\}}) * H.$$

则

$$\begin{aligned} T\mathcal{G}_P &= L \times P^0 = L \times (\delta_{\{0, \dots, 0\}} * H) \\ &= \left( \int \delta_a \times \delta_{\{0, \dots, 0\}}(\cdot) L(da) \right) \otimes H, \end{aligned}$$

由引理 72 得

$$\mathcal{G}_P = \left( \int (\delta_a \times \delta_{\{0\}})(\cdot) L(da) \right) \otimes H = \int (\delta_a \times (\delta_{\{0\}} * H))(\cdot) L(d\tilde{a}),$$

从而  $\mathcal{G}_P^T = L \times H$ , 于是由定理 V.39 及定理 79 知  $P$  可表为如下形式:

$$P(\cdot) = \int P_{lk}(\cdot) \sigma(dl).$$

## §16. 平稳正则无穷可分分布

81. 引理 设  $\gamma_h (h \geq 2)$  是  $((R^m)^h, (\mathcal{M}^m)^h)$  上的局部有限对称测度, 满足:

$$\gamma_h((A_1 + t) \times \dots \times (A_h + t)) = \gamma_h(A_1 \times \dots \times A_h),$$

凡  $t \in R^m, A_1, \dots, A_h \in \mathcal{M}^m$ , 又对所有  $A \in \mathcal{M}^m, \gamma_h(A \times (R^m)^{h-1}) < \infty$ , 则  $\gamma_h$  可以表为如下形式

$$\gamma_h = \left( \int L \otimes C_h \right) \phi_h, \quad (h \geq 2),$$

其中  $L$  是  $(R^m, \mathcal{M}^m)$  上的 Lebesgue 测度,  $C_h$  是  $((R^m)^{h-1}, (\mathcal{M}^m)^{h-1})$  上的局部有限对称测度, 而  $\phi_h: (R^m)^h \rightarrow (R^m)^{h-1}$  是如下的变换:

$$\phi_h(x_1, \dots, x_h) = \left( \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_h}{\sqrt{h}}, \frac{x_1 - x_2}{\sqrt{h}}, \dots, \frac{x_{h-1} - x_h}{\sqrt{h}} \right).$$

证明 记

$$\tilde{\gamma}_h = \gamma_h \phi_h^{-1}, \quad (h \geq 2),$$

则对任意的  $t \in R^m$ , 任意的  $A \in \mathcal{M}^m$  及  $B \in (\mathcal{M}^m)^{h-1}$ , 有

$$\tilde{\gamma}_h((A + t) \times B) = \gamma_h(A \times B),$$

从而对于固定的  $B \in (\mathcal{M}^m)^{h-1}$ , 有

$$\tilde{\gamma}_h(\cdot \times B) = L(\cdot) \times C_h(B),$$

容易验证集函数  $C_h(\cdot)$  是  $((R^m)^{h-1}, (\mathcal{M}^m)^{h-1})$  上的局部有限对称测度. 于是

$$\tilde{\gamma}_h = L \times C_h, \quad \gamma_h = (L \times C_h) \phi_h.$$

82. 现在设  $P$  是  $R^m$  上的正则无穷可分分布. 由定理 V.54 可知  $P$  具有如下形式的 Laplace 变换:

$$-\log \Psi_P(f) = \sum_{k=1}^{\infty} \int (1 - \exp(-\sum_{i=1}^k f(a_i))) \gamma_k(da_1 \times \dots \times da_k).$$

由诸  $\gamma_k (k \geq 1)$  与典测度  $P$  的关系, 可知当  $P$  为平稳分布时, 有

$$\begin{aligned} \gamma_1(A+1) &= \gamma_1(A), \quad t \in R^m, A \in \mathcal{M}; \\ \gamma_k(A_1+1) \times \cdots \times (A_k+1) \\ &= \gamma_k(A_1 \times \cdots \times A_k), \quad k \geq 2, \quad t \in R^m, A_1, \dots, A_k \in \mathcal{M}, \end{aligned}$$

于是知存在非负实数  $c$ , 使

$$\gamma_1 = c \cdot L,$$

而对于  $k \geq 2$ , 由前述引理可知  $\gamma_k$  可以表为

$$\gamma_k = (L \times C_k) \psi_k.$$

利用这点并结合第四章中的收敛定理, 可以导出无穷小三角序列收敛于平稳正则无穷可分分布, 特别是平稳 Gauss-Poisson 分布的条件.

# 参 考 文 献

- (1) Billingsley, P., *Convergence of Probability Measures*, John Wiley & Sons, 1968.
- (2) Kallenberg, O., *Random Measures*, Academic Press, 1976.
- (3) Matthes, K., Kerstan, J. and Mecke, J., *Infinitely Divisible Point Processes*, Wiley, 1978.
- (4) Neveu, J., *Mathematical Foundations of the Calculus of Probability*, Holden-Day, 1965.
- (5) Parthasarathy, K. R., *Probability Measures on Metric Spaces*, Academic Press, 1967.
- (6) Jagers, P., *Aspects of Random Measures and Point Processes*, In *Advances in Probability and Related Topics*, 3, 179—239, Marcel Dekker, 1974.
- (7) Hewitt, E. and Stromberg, K., *Real and Abstract Analysis*, Springer Verlag, 1966.
- (8) Kurtz, T. G., *Point Processes and Completely Monotone Set Functions*, Z. Wahrscheinlichkeitstheorie und verw. Gebiete, 57—67(1974).
- (9) Хинин, А. Я., Математические Методы Теории Массового Обслуживания, Изд. АН СССР, 1965. (中译本: 张理千、殷涌泉译, 公用事业理论的数学方法, 科学出版社)
- (10) Прохоров, Ю. В., Сходимость Случайных Процессов и Предельные Теоремы Теории Вероятностей, Теор. Вероят. и ее Примен., 1, 177—238 (1966).
- (11) 梁之昇, Delphic半群与随机点过程, 数学年刊 5A, 127—132(1984).
- (12) 戴永隆, 关于Poisson过程一个定理的简单证明, 中山大学学报(自然科学版), 1981年 第二期, 26—29.
- (13) 戴永隆, 随机测度的绝对连续性和相互奇异性, 数学年刊, 3, 241—248(1982).
- (14) 戴永隆, 距离空间上测度的局部弱收敛, 数学学报, 25:6 746—753(1982).
- (15) Dai Yonglong and Pei Xiang., *On the Convergence for Null-Arrays of the Point Processes*, Chin Ann of Math., 5B, 67—72(1984).



# 基本符号索引

符号	页	符号	页
$(X, \rho_X)$	1	$N_{A_1, \dots, A_k}$	22
$\mathcal{A}$	1	$N_z$	32
$\mathcal{B}$	1	$\mathcal{P}_P$	40
$L_m(\Gamma)$	1	$I_P$	40
$L_\sigma(\Gamma)$	1	$A\mu$	43
$\mathbf{M}$	2	${}_A P$	43
$\mathbf{N}$	2	${}_A N$	43
$(M, \mathbf{M})$	3	$\mathcal{F}_{m+}$	44
$(N, \mathbf{N})$	3	$\phi_r(f)$	44
$\mathcal{B}_K$	4	$\mu f$	44
$\mathcal{F}_b$	4	$\mathcal{F}_+$	47
$\mathcal{F}$	4	$\mathcal{E}_+$	49
$\mathcal{F}_K$	4	$(\mathcal{E}_+, \rho_{\mathcal{E}_+})$	49
$M_b$	4	$\mathcal{B}_P$	50
$M_K$	4	$\mathcal{A}_{cE}$	50
$\xrightarrow{w}$	5	$\mathcal{B}_{cE}$	50
$\xrightarrow{.I}$	5	$\Pi_{h_1, \dots, h_m}$	54
$\xrightarrow{v}$	5	$D \Pi_{h_1, \dots, h_m}$	54
$\mathcal{A}\mu$	6	$E_1 * E_2$	60
$(M_b, \rho_{M_b})$	6	$\exp E$	62
$\mathcal{B}\mu$	8	$\mathcal{H}_E(E \in \mathcal{E}_+)$	63
$(M, \rho_M)$	8	${}_A E$	63
$(M_K, \rho_{M_K})$	13	$E_{A_1, \dots, A_m}$	63
$K_\rho(\mu, \nu)$	14	$\mathcal{B}_c E$	64
$K_d(\mu, \nu)$	14	$I_E$	64
$\mathcal{S}_N$	22	$I_E^{(2)}$	65
$\mathcal{S}_N$	22	$\mathcal{E}_r$	72
$\Pi_{A_1, \dots, A_k}$	22	$\ E\ $	72
$P_{A_1, \dots, A_k}$	22	$(\mathcal{E}_r, \ \cdot\ )$	72
$\mathbf{M}_{A_1, \dots, A_k}$	22	$\mathcal{S}_{IN}$	76
		$N_d$	83

$(N_z, \mathbf{N}_z)$	83	$G_A$	151
$\mathcal{E}_+$	85	$G_+$	162
$\mathcal{E}_-$	86	$\phi(G)$	162
$\mathcal{H}_T(E\epsilon\mathcal{E}_w)$	87	$T_i$	170
$\mathbf{P}$	93	$\tilde{h}(\lambda)$	171
$Q_\lambda$	94	$\underline{h}(\lambda)$	171
$P_\lambda$	94	$h^*(\lambda)$	172
$\mathcal{Q}_H$	111	$\mathbf{M}$	175
$I_H$	111	$i_p$	178
$r(\mu)$	119	$S(\mu)$	178
$N^d$	119	$\sigma_L(\cdot)$	178
$(N^d, \rho_{N^d})$	120	$\mathcal{T}_\mu$	181
$\mathcal{E}_w^d$	120	$N^0$	181
$(\mathcal{E}_w^d, \rho_{\mathcal{E}_w^d})$	121	$\mathbf{N}^0$	181
$(\mathcal{E}_w, \rho_{\mathcal{E}_w})$	121	$T\mathcal{Q}_H$	181
$\mathcal{A}_{cc}$	121	$H^0$	182
$\mathcal{A}_{cs}$	121	$\mathbf{N}$	184
$V \otimes H$	141	$H_0$	191
$\mathcal{Q}_P^T$	150	$P_\bullet$	196